



# Développement d'un modèle d'hydrologie sous-glaciaire dédié à la simulation du glissement basal des glaciers.

Basile de Fleurian

## ► To cite this version:

Basile de Fleurian. Développement d'un modèle d'hydrologie sous-glaciaire dédié à la simulation du glissement basal des glaciers.. Sciences de la Terre. Université de Grenoble, 2010. Français. NNT : . tel-00541108

**HAL Id: tel-00541108**

**<https://theses.hal.science/tel-00541108>**

Submitted on 29 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

## THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité «Sciences de la terre de l'univers et de l'environnement»

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée et soutenue publiquement par

de Fleurian Basile

le 4 Novembre 2010

---

# Développement d'un modèle d'hydrologie sous-glaciaire dédié à la simulation du glissement basal des glaciers.

---

Thèse dirigée par LE MEUR Emmanuel et codirigée par GAGLIARDINI Olivier

## JURY

Civilité/Nom/Prénom	Fonction et lieu de la fonction	Rôle
Mme. FLOWERS Gwenn	Assistant Professor SFU Burnaby	Rapporteur
M. PATTYN Frank	Professeur ULB Bruxelles	Rapporteur
M. LÜTHI Martin	Dr. ETH Zürich	Examineur
M. BRAUN Jean	Professeur UJF Grenoble	Président
M. LE MEUR Emmanuel	HDR UJF Grenoble	Examineur
M. GAGLIARDINI Olivier	HDR UJF Grenoble	Examineur

Thèse préparée au sein du «Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement»  
dans «l'École Doctorale Terre, Univers, Environnement»



# Ante Scriptum

Merci tout d'abord à Manu et Olivier pour l'encadrement qu'il m'ont procuré au cours de cette thèse autant pour la gestion de scie égoïne que pour le découpage de code.

En restant formel je remercierais les membres du jury international (G.F. F.P. J.B. M.L. O.G. M.L.) qui ont bien voulu lire (un grand nombre de fois pour certains) et/ou entendre le fruit de ces années de labeur.

Reste tous les autres et on commence ici les chose plus complexes car leur noms ne sont pas écrits sur la couverture. Dans le désordre et en en oubliant un bon paquet on pourrait faire un petit tour des gens à remercier qui vont bien arriver à se reconnaître.

Ceux qui préféreraient me voir avec une pelle dans les mains qu'un clavier sous les doigts. Merci à eux de m'avoir montrer que les glacier ne se limitaient pas à une série de ligne de code.

Il y a les lèves tot, et les couches tard qu'il faut arriver à gérer dans la même semaine et éviter dans la même journée car à commencer par la poudre et finir par la mousse il devient compliquer de garder la forme.

Les plus acharnés des deux catégories précédente ont aussi favorisé des débuts de semaine dans la joie de pouvoir rester assis de longues heures dans un bureau chauffé et des chaussures qui ne font pas mal au pied.

Enfin en passant on oubliera pas ceux qui on permit que ~~mon pot~~ ma soutenance se passe pour le mieux à grand renfort de boisson, nourriture, manchots, photos et fer à repasser.

Les lecteurs qui ne s'arrêterons pas à cette page de remerciement pourront profiter d'un texte expurger de la grande majorité de ces fêtes d'orthographe grâce à la tenacité de certains correcteurs que, je pense, ils remercieront.

Et voila après cette phrase on rentre dans le vif du sujet alors LMF les amis.



# Résumé

La modélisation de la dynamique glaciaire passe par la compréhension et la reproduction des processus physiques responsables des déplacements que l'on observe à la surface des glaciers. Certains de ces mécanismes, tels que la déformation de la glace, sont bien connus et intégrés dans les modèles. D'autres processus, et en particuliers ceux qui œuvrent à la base des glaciers, sont moins bien maîtrisés. Dans ce cas, ces lacunes s'expliquent en partie par les difficultés à observer les phénomènes sous plusieurs centaines de mètres de glace. Ainsi, même si le glissement à la base des glaciers a été observé dès le début du XX<sup>e</sup> siècle et que certains des mécanismes ont été identifiés, sa modélisation reste un problème actuel.

La majorité des modèles de dynamique glaciaire utilisent des lois de frottement uniquement basées sur la contrainte basale tangentielle pour déterminer les vitesses de glissement. Il est alors nécessaire de faire varier en temps et en espace le paramètre de la loi de frottement pour obtenir un champ de vitesse comparable aux données tout au long de l'année. Par ailleurs, de nombreuses études ont montré que la pression d'eau à la base des glaciers jouait un rôle important sur la vitesse de glissement des glaciers. Or, cette pression d'eau est directement dépendante du volume d'eau présent à l'interface entre le glacier et son socle rocheux et donc de l'apport d'eau liquide. La prise en compte de la pression d'eau dans une loi de frottement permet alors de représenter de manière plus réaliste les variations saisonnières des vitesses observées.

La mise en place d'une telle loi de frottement nécessite de développer un modèle d'hydrologie qui soit capable de calculer la pression d'eau à la base du glacier. Jusque là, les modèles d'hydrologie sous-glaciaire s'intéressaient uniquement aux débits observés au front des glaciers. Dans la plupart de ces modèles, les systèmes de drainage sont définis en supposant que la pression d'eau à la base du glacier est égale à la pression nécessaire pour amener le glacier à son point de flottaison, ce qui définit une pression effective nulle. L'eau produite en surface et à la base du glacier est alors «routée» au travers de ce système de drainage sans que sa pression soit réellement prise en compte.

L'objectif de cette thèse est de mettre en place un modèle d'hydrologie sous-glaciaire qui permette le calcul de la pression d'eau à la base des glaciers et de le coupler ensuite à un modèle d'écoulement glaciaire par l'intermédiaire d'une loi de frottement. Plutôt que de modéliser de manière exacte le système de drainage, on a choisi de mettre en place des milieux poreux analogues représentant les deux composantes (inefficace et efficace) du système de drainage. Les expériences de sensibilité présentées dans ce travail montrent que la méthode proposée permet de reproduire les spécificités spatiales et temporelles d'un système de drainage sous glaciaire. Enfin, la reproduction qualitative d'un phénomène glaciologique extrême de jökulhlaup (vidange de lac sous-glaciaire) a permis de vérifier la robustesse du modèle.



# Abstract

Modeling glacier dynamics needs proper knowledge of a number of processes which are responsible for the displacements that are observed at the surface of glaciers. Some of these mechanisms, like ice deformation are well known and yet implemented into ice flow models. On the other hand, processes that work at the base of the glaciers are much less controled. This lack of knowledge is partly explained by the fact that access to processes that occur under hundreds of meters of ice is not easy. Thus, even if glacier sliding has been observed since the early twentieth century and that some of its mechanisms have been identified, its accurate modeling is still a current issue.

In order to determine glacier sliding, friction laws that are currently used in ice flow models are only depending upon the basal shear stress. This simple relationship needs a precise fitting of the parameters which vary both in time and space so as to yield surface velocities compatible with data. Field observations also show that subglacial water pressure plays a crucial role in glacier dynamics. Furthermore, water pressure is closely related to the volume of water present at the bed of the glacier and, therefore to the production of water. Thus, introducing water pressure in a friction law should allow to represent the seasonal velocity variations in a more realistic manner.

Using such a friction law requires the development of an hydrological model capable of computing the water pressure at the base of the glacier. So far, models of subglacial hydrology were dedicated to the computation of the water discharge at the snout of glaciers. In most of these models, the drainage systems are defined by assuming that water pressure at the bedrock is equal to the pressure required to bring the glacier at its flotation, thereby leading to a zero effective pressure. The water produced at the surface and bottom of the glacier is then "routed" through the drainage system and its pressure is thus neglected.

The objective of this thesis is to develop a subglacial hydrological model which enables the computation of water pressure at the base of glaciers and to couple it to an ice flow model through of a friction law. Rather than modeling accurately the drainage system itself, we chose to implement an equivalent porous media which, according to the chosen parameters, features both the efficient and inefficient components of the system. The sensitivity experiments presented in this work show that the proposed method can reproduce the spatial and temporal characteristics of a subglacial drainage system. Finally, the robustness of the model arose from its ability to qualitatively reproduce an extreme glaciological phenomenon under the form of a jökulhlaup (sudden drainage of a subglacial lake).





# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Notation</b>	<b>xii</b>
<b>Introduction</b>	<b>xv</b>
<b>1 Fonctionnement des glaciers</b>	<b>1</b>
1.1 De la neige à l’eau, le bilan de masse du glacier . . . . .	1
1.1.1 L’accumulation, source de masse du glacier . . . . .	3
1.1.2 L’ablation, un frein au développement glaciaire . . . . .	4
1.1.3 Le bilan de masse, indicateur de la “santé” glaciaire . . . . .	4
1.2 Des glaciers sculptés par la dynamique de la glace . . . . .	6
1.2.1 Calotte ou glacier de montagne, une interaction dynamique-climat . . . .	7
1.2.2 L’existence mouvementée de la glace . . . . .	8
<b>2 L’hydrologie sous glaciaire, un acteur de la dynamique glaciaire</b>	<b>11</b>
2.1 Les différentes composantes de la dynamique glaciaire . . . . .	11
2.1.1 La déformation de la glace . . . . .	11
2.1.2 Le glissement basal . . . . .	13
2.1.3 La déformation du sédiment sous-jacent . . . . .	15
2.2 Le développement des lois de frottement . . . . .	17
2.2.1 Théorie de Weertman . . . . .	17
2.2.2 Discussion sur les hypothèses de Weertman . . . . .	22
2.2.3 Importance de la pression effective . . . . .	23
2.3 Les systèmes hydrauliques glaciaires. . . . .	26
2.3.1 La production d’eau des glaciers . . . . .	26
2.3.2 Les systèmes de drainage sous-glaciaire . . . . .	28
2.3.3 Le drainage sous-glaciaire, une combinaison de plusieurs systèmes . . . . .	31
2.4 Synthèse sur la dynamique glaciaire . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Modélisation de la dynamique glaciaire</b>	<b>35</b>
3.1	Les objectifs de la modélisation . . . . .	35
3.1.1	La reconstruction climatique . . . . .	35
3.1.2	L'évolution future des glaciers . . . . .	37
3.2	Des approximations adaptées aux problèmes à traiter . . . . .	39
3.2.1	Approximation de la couche mince . . . . .	40
3.2.2	Modélisation des plates-formes flottantes . . . . .	42
3.2.3	Modèles d'ordres supérieurs . . . . .	44
3.2.4	Modèles full-Stokes . . . . .	44
3.3	Présentation d'un modèle «Full Stokes» adapté à la dynamique glaciaire . . . . .	45
3.3.1	Présentation de la méthode des éléments finis . . . . .	45
3.3.2	Résolution des équations de Stokes . . . . .	46
3.3.3	Résolution de la surface libre . . . . .	47
3.3.4	Conditions aux limites des équations de Stokes . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Un modèle d'hydrologie dédié au glissement basal</b>	<b>49</b>
4.1	La modélisation de l'hydrologie glaciaire . . . . .	49
4.1.1	L'hydrologie glaciaire, une modélisation à deux facettes . . . . .	49
4.1.2	État de l'art . . . . .	50
4.2	Un modèle hydrologique basé sur l'équation de diffusion . . . . .	56
4.2.1	Développement de l'équation de diffusion pour une nappe captive . . . . .	57
4.2.2	Introduction des équations d'état . . . . .	60
4.2.3	Passage à un problème plan à deux dimensions . . . . .	62
4.3	Implémentation de l'équation de diffusion dans Elmer . . . . .	63
4.3.1	Formulation variationnelle . . . . .	63
4.3.2	Vérification d'un état stationnaire . . . . .	64
4.3.3	Importance de la durée des pas de temps . . . . .	66
4.3.4	Conservation du volume . . . . .	68
4.4	Application de l'équation de diffusion à un système de drainage à deux composantes . . . . .	69
4.4.1	Construction bicouche du modèle . . . . .	70
4.4.2	Deux systèmes de drainage interconnectés . . . . .	70
4.4.3	Transfert d'eau entre les deux systèmes . . . . .	72
4.4.4	Conservation du volume pour le système couplé . . . . .	76
4.5	Conclusion sur la structure du modèle . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Application à un cas 2D</b>	<b>79</b>
5.1	Présentation de l'expérience . . . . .	79
5.1.1	Cadre général de l'expérience . . . . .	79
5.1.2	Géométrie du problème . . . . .	82
5.1.3	Déroulement du jökulhlaup et forçage imposé au modèle . . . . .	82
5.2	Paramètres du modèle spécifiques à l'expérience . . . . .	85
5.2.1	Conditions aux limites . . . . .	85
5.2.2	Procédure d'initialisation et gestion des pas de temps . . . . .	87
5.2.3	Sensibilité aux paramètres hydrologiques . . . . .	88

---

5.3	Résultats . . . . .	96
5.3.1	Vérification des paramètres hydrologiques . . . . .	96
5.3.2	Modélisation de la dynamique post-jökulhlaup . . . . .	97
5.3.3	Sensibilité du modèle en régime transitoire . . . . .	102
5.4	Conclusion sur les résultats obtenus . . . . .	104
<b>Conclusion</b>		<b>107</b>
<b>Annexes</b>		<b>109</b>
<b>A Présentation de la méthode des éléments finis</b>		<b>109</b>
A.1	La formulation faible d'un problème . . . . .	109
A.2	Les fonctions de base . . . . .	111
<b>B Développement de l'équation d'état d'un solide poreux</b>		<b>115</b>
<b>C Principe de la méthode de pénalisation</b>		<b>121</b>

## Notations

Les vecteurs sont en caractères gras

Les tenseurs sont en capitales et en caractères gras

$\mathcal{A}$	paramètre de la loi de Glen [ $\text{Pa}^{-n} \text{a}^{-1}$ ]
$A_s$	coefficient de glissement sans cavitation [ $\text{m Pa}^{-m} \text{a}^{-1}$ ]
$b$	bilan de masse de surface [ $\text{m glace a}^{-1}$ ]
$C$	valeur maximale de $\tau_b/N$ dans la loi de frottement
$e$	épaisseur de la couche de sédiment [ $\text{m}$ ]
$g$	accélération de la gravité [ $\text{m a}^{-2}$ ]
$h_w$	charge hydraulique [ $\text{m}$ ]
$\mathbf{K}$	conductivité hydraulique [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$\mathbf{k}$	perméabilité intrinsèque du solide [ $\text{m}^2$ ]
$L_i$	chaleur latente de fusion de la glace [ $\text{J kg}^{-1}$ ]
$m$	exposant de la loi de frottement
$N$	pression effective [ $\text{Pa}$ ]
$n$	exposant de Glen
$\mathbf{n}$	vecteur normal au socle orienté vers le haut
$p$	pression isotrope [ $\text{Pa}$ ]
$p_i$	pression hydrostatique de glace [ $\text{Pa}$ ]
$p_w$	pression de l'eau [ $\text{Pa}$ ]
$Q$	débit par unité de surface [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$Q_G$	flux géothermique [ $\text{W m}^{-2}$ ]
$Q_{hf}$	débit du au frottement du glacier sur son socle [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$Q_{hg}$	débit du au flux géothermique [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$Q_{re}$	débit de recharge de l'aquifère [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$Q_t$	débit entre les deux systèmes de drainage [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$q$	débit par unité de volume [ $\text{a}^{-1}$ ]
$S$	coefficient d'emmagasinement de la nappe
$S_s$	coefficient d'emmagasinement spécifique [ $\text{m}^{-1}$ ]
$\mathbf{T}$	transmissivité de l'aquifère [ $\text{m}^2 \text{a}^{-1}$ ]
$\mathbf{U}$	vitesse de filtration du fluide par rapport au solide [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$\mathbf{U}_s$	vitesse de filtration du solide [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$\mathbf{U}_w$	vitesse de filtration du fluide [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$\mathbf{u}$	vitesse de la glace [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$u_b$	vitesse de glissement à la base du glacier [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$\mathbf{u}_s^*$	vitesse réelle du solide [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$\mathbf{u}_w^*$	vitesse réelle du fluide [ $\text{m a}^{-1}$ ]
$z$	coordonnée verticale [ $\text{m}$ ]
$z_b$	altitude du socle [ $\text{m}$ ]
$z_t$	altitude de la surface [ $\text{m}$ ]

---

$\alpha$	compressibilité du sédiment [ $\text{Pa}^{-1}$ ]
$\beta_l$	compressibilité du fluide [ $\text{Pa}^{-1}$ ]
$\beta_s$	compressibilité des grains solides [ $\text{Pa}^{-1}$ ]
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$	tenseur des vitesses de déformation
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e$	deuxième invariant des vitesses de déformation
$\eta$	viscosité de la glace [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ]
$\mu_w$	viscosité dynamique du fluide [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ]
$\rho_i$	masse volumique de la glace [ $\text{kg m}^{-3}$ ]
$\rho_s$	masse volumique du solide [ $\text{kg m}^{-3}$ ]
$\rho_w$	masse volumique du fluide [ $\text{kg m}^{-3}$ ]
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes [ $\text{Pa}$ ]
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes déviatoires [ $\text{Pa}$ ]
$\tau_b$	contrainte basale moyenne [ $\text{Pa}$ ]
$\omega$	porosité



# Introduction

L'évolution climatique actuelle est source de questionnement quant à la modification de la géométrie des glaciers de notre planète. Ainsi, la demande de la part des décideurs est de plus en plus forte pour connaître le devenir de cette eau actuellement stockée sous forme de glace. Cette question se pose pour les grandes calottes polaires que sont l'Antarctique et le Groënland et qui pourraient contribuer de manière significative à une augmentation du niveau des mers (e.g. Alley *et al.*, 2005). Mais aussi à plus petite échelle, lorsque l'on se soucie des transformations subies par les glaciers de type alpin dont la régression peut perturber les ressources en eau qui leur sont afférentes, voire accroître les risques d'origine glaciaire et même agir, à leur échelle, sur le niveau des mers.

La compréhension des mécanismes qui sont à l'œuvre dans le fonctionnement des glaciers est donc nécessaire pour permettre de prévoir leur évolution et les risques potentiels qu'ils représentent. La dynamique des glaciers est observable par tous, mais la prédiction de leur comportement à plus ou moins long terme nécessite de mettre en place des modèles numériques complexes qui doivent prendre en compte les différents phénomènes physiques qui entrent en jeu dans cette dynamique. C'est pourquoi, bien que l'on dispose d'observations glaciologiques à partir du XVIII<sup>e</sup> siècle, il faudra attendre la deuxième moitié du vingtième siècle pour que des modèles numériques permettant la prédiction voient le jour (Mahaffy, 1976; Jenssen, 1977; Oerlemans, 1982). Ces modèles s'avèrent plus adaptés à la modélisation des calottes polaires dont les dimensions particulières permettent de faire des approximations qui simplifient grandement les calculs (Hutter, 1983; Morland, 1984). Ces modèles se basent sur les lois de déformation de la glace qui ont été formalisées à partir d'expériences de laboratoire (Glen, 1955). Toutefois, il leur manque le formalisme nécessaire à la prise en compte des processus basaux qui régissent le glissement des glaciers sur leur socle.

Depuis, l'émergence de nouveaux modèles a permis de combler ces lacunes en reproduisant les vitesses de glissement à la base des glaciers par l'intermédiaire de différentes lois de frottement (Weertman, 1957b, 1966; Iken, 1981; Schoof, 2005; Gagliardini *et al.*, 2007). Le développement de ces lois est resté plus théorique que celui à l'origine de la loi de déformation de la glace. En effet, les faibles taux de déformation mis en jeu à la base des glaciers ainsi que le respect des rapports d'aspect rend complexe la mise en place d'expériences de laboratoire (Budd *et al.*, 1979). Les observations *in-situ* pourraient remédier à ces problèmes expérimentaux mais l'accès à la base des glaciers est au moins aussi compliqué que la mise en place de ces expériences.

En parallèle, l'augmentation des capacités de calcul informatique permet dorénavant de traiter des équations plus complexes et donc de s'affranchir de certaines approximations. Ces nouvelles possibilités permettent de résoudre les équations de la dynamique de manière exacte et non plus



en considérant que la glace que l'on modélise a un rapport d'aspect comparable à celui d'une plaque de verglas. Ces nouvelles méthodes de résolution permettent de traiter des problèmes à plus petite échelle et d'aborder de nouveaux sujets tels que la datation des carottes ou la dynamique des glaciers de plus petite taille (glaciers émissaires, glaciers de type alpin). L'amélioration de la précision des modèles demande aussi une meilleure résolution des données d'entrée, lesquelles contraignent par la suite l'évolution des modèles.

Une observation plus précise des appareils glaciaires devient alors indissociable de la modélisation. L'acquisition des données nécessaires à la mise en place des simulations numériques est rendue possible par les évolutions technologiques permettant d'obtenir le degré de précision souhaité (même si ce n'est toujours pas plus facile). En effet, la mise en place de simulations à petite échelle sur des processus de plus en plus complexes demande des niveaux de détails de plus en plus fins, que ce soit en terme de précision ou de résolution. Des problèmes se posent alors lorsque l'on cherche à connaître précisément la topographie mais aussi la nature du socle rocheux présent sous quelques centaines de mètres de glace. En surface, les observations terrestres aéroportées et satellitaires permettent de recueillir un volume de données plus important qui sert, entre autre, à valider les résultats de modélisation.

L'expérimentation et la théorie ont permis de formaliser à la fois la loi de déformation du matériau glace et les lois de frottement à la base des glaciers. Ces lois ont ensuite été confirmées par les observations réalisées. En particulier pour les lois de frottement, le lien entre hydrologie sous-glaciaire et glissement basal a été clairement mis en évidence (Iken et Truffer, 1997; Mair *et al.*, 2001; Bartholomäus *et al.*, 2008; Magnússon *et al.*, 2010). Aujourd'hui, les glaciologues disposent d'une loi de déformation de la glace et de lois de frottement capables de lier les pressions d'eau sous-glaciaire aux vitesses de glissement. Dans la chaîne de traitement, il manque alors des modèles d'hydrologie sous-glaciaire qui soient spécifiquement adaptés à ce problème. Cette lacune n'est pas comblée par les modèles d'hydrologie glaciaire existant qui sont peu nombreux et non adaptés à notre problématique. Ces modèles ayant été développés pour calculer des débits au front des glaciers, ils ne sont en effet pas adaptés à la modélisation du lien entre pression d'eau et vitesses basales (Sharp *et al.*, 1993; Richards *et al.*, 1996; Arnold *et al.*, 1998).

Le but de ce travail est donc de permettre l'utilisation de lois de frottement précédemment développées en mettant au point un modèle d'hydrologie capable de calculer la pression d'eau à la base d'un glacier. La particularité de ce travail réside dans le fait que la variable d'intérêt du modèle hydrologique est ici la pression d'eau sous glaciaire et non le volume d'eau évacué comme c'est généralement le cas. On peut alors se focaliser sur le système de drainage sous-glaciaire laissant de côté les autres éléments du système, ce qui permet alors de traiter cet unique système de manière plus rigoureuse.

En guise d'introduction aux processus glaciaires, le Chapitre 1 de ce manuscrit s'attache à présenter les grands mécanismes qui sont à l'origine de la formation mais aussi de l'évolution des glaciers. On abordera rapidement dans ce chapitre les notions clés de la dynamique glaciaire dont certaines seront développées plus en détail par la suite. Le Chapitre 2 donne un aperçu des différentes composantes qui entrent en jeu dans la dynamique glaciaire avant de s'intéresser plus en détail à la composante basale du déplacement ainsi qu'aux particularités des systèmes de drainage sous-glaciaire.

Ensuite, les différents objectifs de la modélisation glaciologique ainsi que les principaux types de modèles d'écoulement seront présentés dans le Chapitre 3. Nous profiterons de ce chapitre pour

introduire le modèle d'écoulement qui a été utilisé au cours de ce travail. Le Chapitre 4 constitue le cœur de ce travail et présente tout d'abord l'état de l'art sur la modélisation de l'hydrologie sous-glaciaire avant de décrire le modèle d'hydrologie qui a été développé durant cette thèse.

Enfin le Chapitre 5 conclut ce travail par une étude de sensibilité du modèle ainsi que son application à un cas naturel.



# Chapitre 1

## Fonctionnement des glaciers

Lliboutry (1964) définit les glaciers comme des «masses de glace naturelles provenant de la neige, permanentes à l'échelle humaine». Cette définition indique bien que la neige est le point de départ pour la formation des glaciers mais ne parle pas de leur diversité. Les conditions spécifiques à chaque environnement telles que la température ou la hauteur de neige accumulée durant l'hiver jouent un rôle important sur la formation des glaciers. La rigueur du climat, directement lié à la latitude et à l'altitude permet donc le développement glaciaire. Sous les latitudes tempérées, les glaciers se formeront en haute montagne comme dans les Alpes. Dans les zones de latitudes élevées, un climat plus rude permet aux glaciers de coloniser les basses vallées où leur croissance entraîne la formation de calottes glaciaires de tailles plus ou moins imposantes comme en Islande ou au Svalbard. Pour les très hautes latitudes, le climat est tel que les conditions de maintien de la glace sont partout réunies ce qui entraîne le développement de glaciers sur l'essentiel des terres émergées. Le maintien de ces conditions durant de longues périodes permet alors de former de gigantesques calottes polaires comme l'Antarctique et le Groenland. Ces différentes formes glaciaires sont présentées sur la Figure 1.1.

Ce chapitre donne un premier aperçu des mécanismes qui sont mis en jeu pour la genèse et l'évolution des glaciers. On traitera tout d'abord du bilan de masse qui contrôle la croissance ou le déclin des glaciers avant d'aborder la dynamique glaciaire qui donne aux glaciers la forme qu'on leur connaît. Les différents mécanismes à l'œuvre seront traités ici de manière succincte et de plus amples informations seront données dans les chapitres suivants.

### 1.1 De la neige à l'eau, le bilan de masse du glacier.

La croissance, ou le déclin, d'un glacier est la conséquence de deux mécanismes. L'accumulation de neige d'une part et son ablation d'autre part. La différence entre ces deux termes constitue le bilan de masse du glacier, lequel permet de savoir si le glacier est dans une phase de croissance (bilan global positif) ou dans une phase de récession (bilan global négatif).

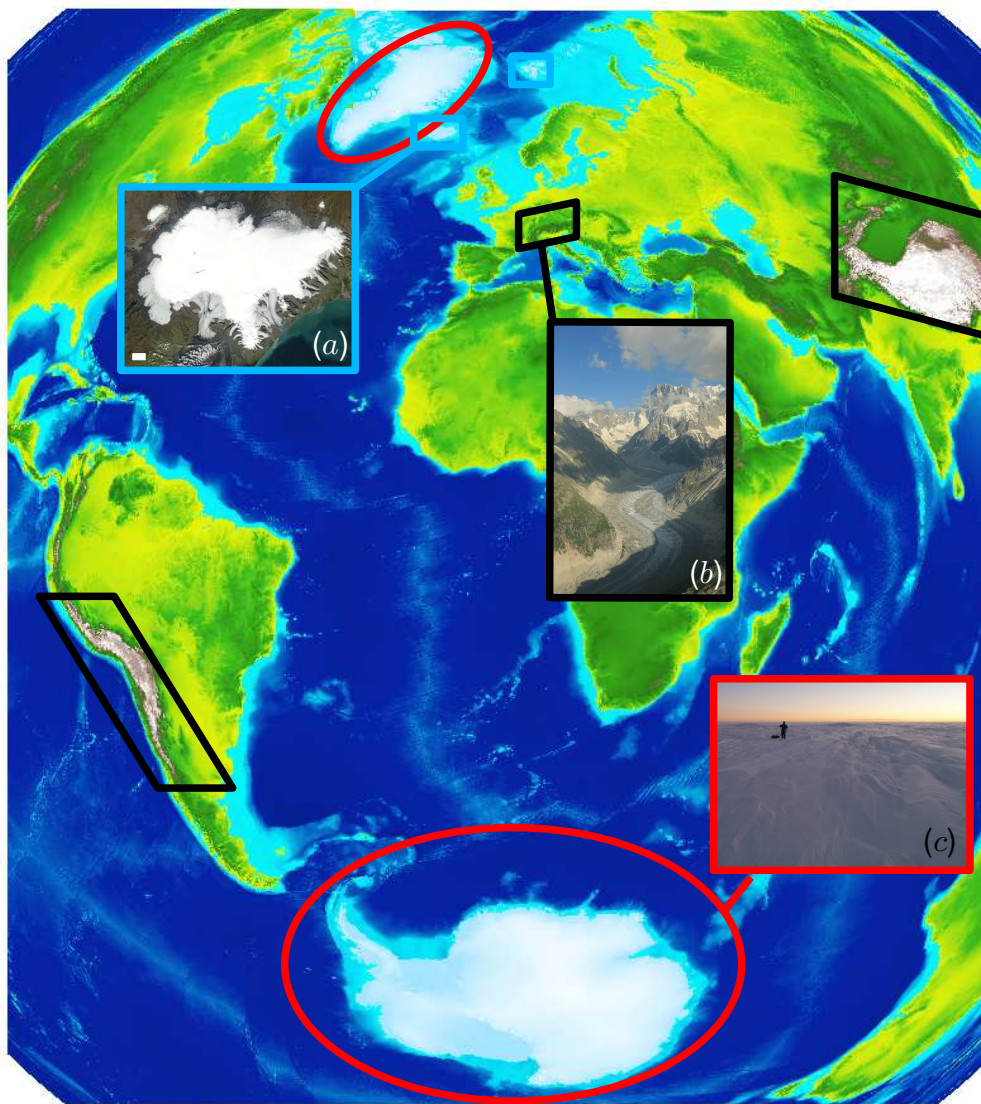


FIG. 1.1: Localisation de différentes formes de glaciers à la surface de la terre. Les petites calottes glaciaires (rectangles bleus, exemple du Vatnajökull (a)), les glacier de montagne (parallélogrammes noirs, exemple de la mer de glace (b)) et les calottes polaires (ellipses rouges, exemple de l'Antarctique (c)). La barre blanche dans (a) représente 10 km. (Photos B. Jourdain)

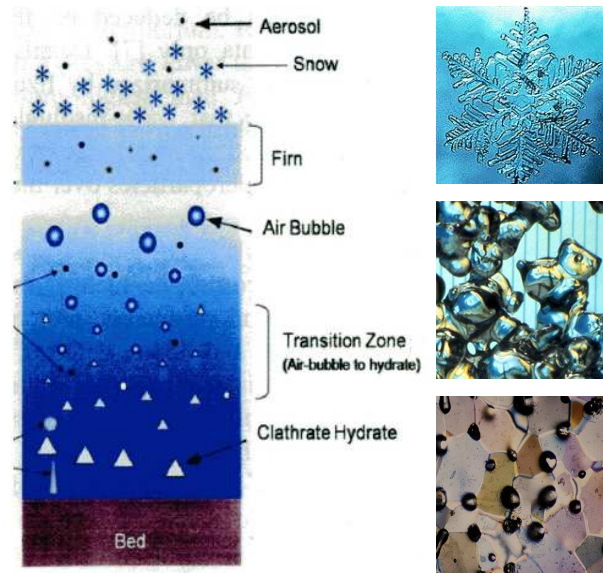


FIG. 1.2: Schéma présentant l'évolution de la densification de la neige (à gauche, issue de Hondoh, 2009). Illustration des différents stades de densification de la neige (en haut à droite) jusqu'à la glace (en bas à droite) en passant par le névé (ou firn, au milieu à droite). Images de l'ANENA pour la neige et le névé et de V. Lipenkov pour la glace.

### 1.1.1 L'accumulation, source de masse du glacier

L'accumulation à la surface des glaciers est principalement due aux précipitations solides de neige. Toutefois on peut citer quelques autres phénomènes qui entrent en jeu dans le bilan de masse global du glacier. Ainsi, les parois abruptes qui surplombent les glaciers de type alpin se chargent aussi de neige durant l'hiver laquelle, plus tard, est purgée sous forme d'avalanches et s'accumule sur le glacier. Le vent peut aussi avoir un effet en redistribuant la neige.

Une fois déposée sur la surface du glacier, la neige commence un lent processus de densification qui, à terme, formera la glace dont est composée la majeure partie du glacier. Cette densification présentée sur la Figure 1.2 peut être scindée en deux étapes principales :

- (i) Trois différents processus permettent la transformation de la neige en névé. Dans les premières couches de surface, le processus commun à tous les manteaux neigeux est le tassement de la neige sous l'effet de son propre poids. Deux processus se démarquent ensuite suivant la température du site. Dans un environnement dont la température est inférieure au point de fusion, des transferts d'eau sous forme de vapeur vont s'établir en fonction du gradient de température vertical. Si la température passe au dessus du point de fusion, alors, des processus de fusion et regel de la neige vont s'ajouter au transfert de vapeur d'eau. La tendance de ces deux processus à réduire le niveau d'énergie libre du système entraîne la formation des grains de neige ronds qui forment le névé. Ce processus de métamorphose dure quelques mois au maximum.
- (ii) Le névé continue alors à se tasser sous l'effet de son propre poids. On considère que la glace

est formée à partir du moment où les bulles d'air présentes dans le névé se referment et ne sont plus reliées à l'atmosphère extérieure. Ce deuxième processus pour passer du névé à la glace est beaucoup plus long et fortement dépendant des hauteurs de neige accumulées et de la température du site. Ainsi la transformation du névé en glace prend quelques années pour les glaciers tempérés de montagne mais elle peut par contre durer plusieurs centaines d'années au centre des calottes polaires pour lesquelles les températures sont très basses et les taux d'accumulation très faibles.

### 1.1.2 L'ablation, un frein au développement glaciaire

Les processus d'ablation jouent un rôle important sur le bilan de masse du glacier en ôtant tout ou partie de la neige accumulée ainsi qu'un certain volume de glace dans la zone d'ablation. L'ablation peut prendre plusieurs formes dont la plus connue est la fonte qui intervient quand la quantité d'énergie reçue par le glacier est plus importante que celle qu'il émet. Cet excès d'énergie va commencer par réchauffer la surface de la neige (ou de la glace) jusqu'à une température de 0°C puis va entraîner la fonte. L'eau ainsi formée peut percoler et regeler dans le manteau neigeux en zone d'accumulation où alors, être drainée à la surface du glacier puis vers son socle en zone d'ablation comme on le verra plus en détail dans la Section 2.3. Ce processus de fonte est aussi présent à la base du glacier où le flux géothermique, l'énergie libérée par le frottement du glacier sur son socle ou encore la fonte due au contact avec l'eau de mer, peuvent avoir une influence non négligeable.

L'ablation peut aussi survenir sous forme de sublimation. La neige (ou la glace) passe alors directement de l'état solide à l'état de vapeur d'eau. Cette transformation survient principalement lorsque l'air est sec (Sicart, 2002, p36). De plus ce changement d'état est très gourmand en énergie (8 fois plus que pour la fonte, Paterson, 1994, p58) et entraîne donc des pertes de masses moins importantes à apport d'énergie égal.

Le vêlage d'icebergs enfin peut avoir un rôle important dans le bilan de masse d'un glacier. En effet les glaciers dont le front se situe dans la mer ou dans un lac évacuent un volume de glace important sous forme d'icebergs. Ce processus est particulièrement actif pour la calotte Antarctique où règnent des températures extrêmement basses qui n'entraînent que très peu de fonte ce qui fait du vêlage d'icebergs le principal processus d'ablation pour cette calotte.

### 1.1.3 Le bilan de masse, indicateur de la "santé" glaciaire

Le bilan de masse est calculé comme la différence entre le terme d'accumulation d'une part et le terme d'ablation d'autre part. Lors du processus de densification un gradient de densité très important s'établit entre la neige fraîche (en moyenne  $200 \text{ kg m}^{-3}$ ) et la glace (environ  $900 \text{ kg m}^{-3}$ ). Ces épaisseurs de neige et de glace sont généralement converties en mètres d'eau équivalents [m w.e.] pour permettre le calcul du bilan de masse à partir des hauteurs de neige précipitées et des hauteurs de neige et/ou de glace qui ont fondu durant l'année.

L'observation de l'évolution du bilan de masse au cours d'une année permet de mettre en évidence ses différentes composantes comme présentées sur la Figure 1.3.

Le calcul du bilan de masse global sur un glacier permet donc de savoir si il a gagné ou perdu de la masse au cours de l'année hydrologique écoulée. L'utilisation de l'année hydrologique

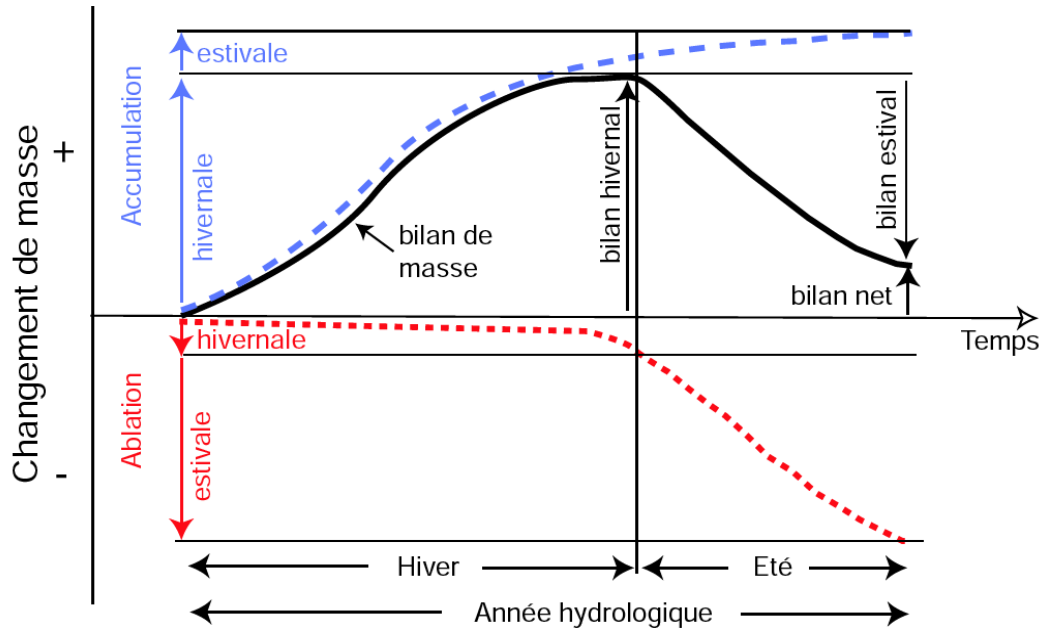


FIG. 1.3: Définition des principaux termes du bilan de masse et leur évolution au cours du temps. Dans les Alpes, l'année hydrologique s'étend généralement du 1<sup>er</sup> octobre au 31 septembre. Figure adaptée d'après Paterson (1994)

plutôt que l'année civile est due à la saisonnalité du bilan de masse. En effet la Figure 1.3 montre que la majorité de l'accumulation se fait durant l'hiver alors que la période d'ablation a lieu en été. Le calage sur l'année hydrologique permet alors d'obtenir des bilans de masses significatifs et comparables d'une année sur l'autre à la fin de la saison d'ablation (31 septembre dans l'hémisphère Nord). La date de début de l'année hydrologique n'est donc qu'une indication et pour coller au plus près au bilan de masse réel du glacier, il faudrait effectuer les mesures d'ablation juste avant la première chute de neige de l'automne et dès que la fonte à la surface du glacier devient nulle. De même pour obtenir un bilan hivernal fiable, les mesures d'accumulation devraient être effectuées après la dernière chute de neige de l'hiver mais avant que le manteau neigeux ne commence à fondre. Toutefois, ces conditions ne sont que très rarement observées et la partie amont du glacier est généralement encore dans une phase d'accumulation à la fin du printemps alors que la zone aval subit déjà une ablation. Le même phénomène se produit au début de l'automne où l'on observe déjà une accumulation à l'amont du glacier alors que la partie aval continue à fondre.

Le bilan de masse permet de définir deux zones sur le glacier, la zone d'accumulation d'une part pour laquelle le bilan est positif sur l'année et la zone d'ablation qui présente elle un bilan négatif. Ces deux zones sont délimitées par la ligne d'équilibre. Cette ligne fictive correspond à la limite entre neige et glace qui est observable à la fin de l'année hydrologique. En effet, dans la zone d'accumulation, une partie de la neige précipitée durant l'hiver subsiste ce qui indique bien un bilan positif. A l'aval de la ligne d'équilibre par contre, la totalité de la neige de l'hiver



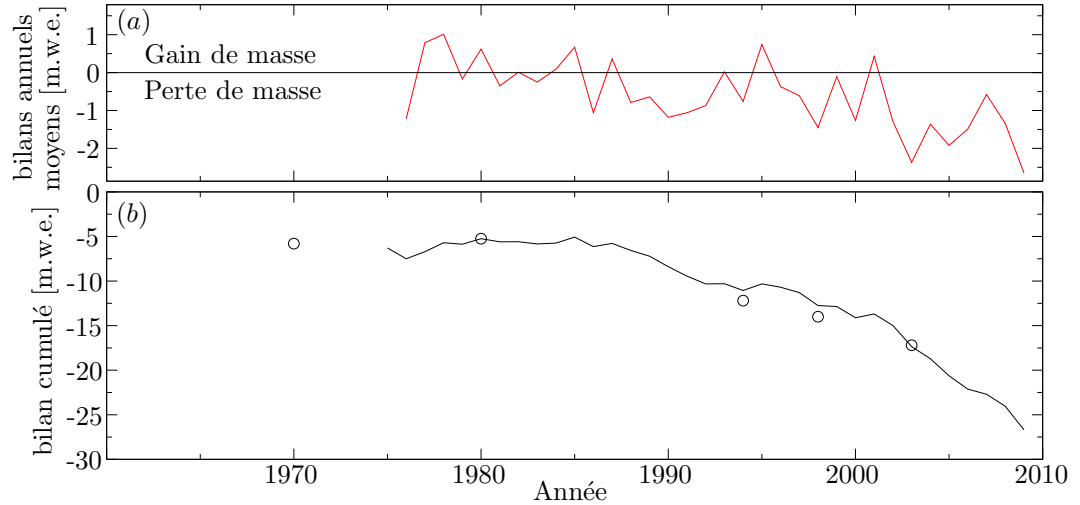


FIG. 1.4: Série de bilans de masse spécifiques annuels moyens (a) et bilan de masse cumulé (b) du glacier d'Argentière. Les bilans sont exprimés en mètres d'eau équivalent. La référence pour le bilan cumulé est une mesure photogrammétrique de 1905 (d'autres mesures photogrammétriques sont indiquées par des cercles). Données du service d'observation GLACIOCLIM (Vincent *et al.*, 2009).

ainsi qu'une partie de la glace plus ancienne a fondu indiquant ainsi un bilan de masse négatif sur l'année.

Finalement, l'intégration de ce terme de bilan sur toute la surface du glacier permettra de définir si la masse du glacier a augmenté ou diminué au cours de l'année hydrologique écoulée. On divise alors généralement ces bilans de masses globaux par la surface du glacier pour obtenir des bilans de masses spécifiques qui correspondent à la hauteur de la "lame d'eau" moyenne qui a été accumulée ou fondue durant l'année écoulée sur l'ensemble de la surface du glacier. La mesure de ces bilans de masse durant de longues séries temporelles permet d'avoir une vue d'ensemble de l'évolution de la masse d'un glacier comme présentée sur la Figure 1.4.

Ces séries de bilans de masse sont fortement liées aux paramètres climatiques et en particulier à la température et aux précipitations. Ce lien fort permet par exemple de reconstruire, à partir de données météorologiques, les bilans de masse passés des glaciers (Vincent, 2002).

## 1.2 Des glaciers sculptés par la dynamique de la glace

Le bilan de masse explique ainsi la formation des glaciers par l'accumulation de neige et sa transformation en glace lors du processus de densification. Ces deux processus ne permettent pas, par contre, d'expliquer les différentes formes glaciaires qui sont observées à la surface du globe. Ainsi, si la glace une fois formée restait immobile, on observerait des volumes de glace importants au dessus de la ligne d'équilibre et des champs de neige éphémères en dessous. La dynamique de la glace joue donc un rôle important en la redistribuant de la zone d'accumulation vers la zone d'ablation ce qui donne aux glaciers la forme sous laquelle on les observe.

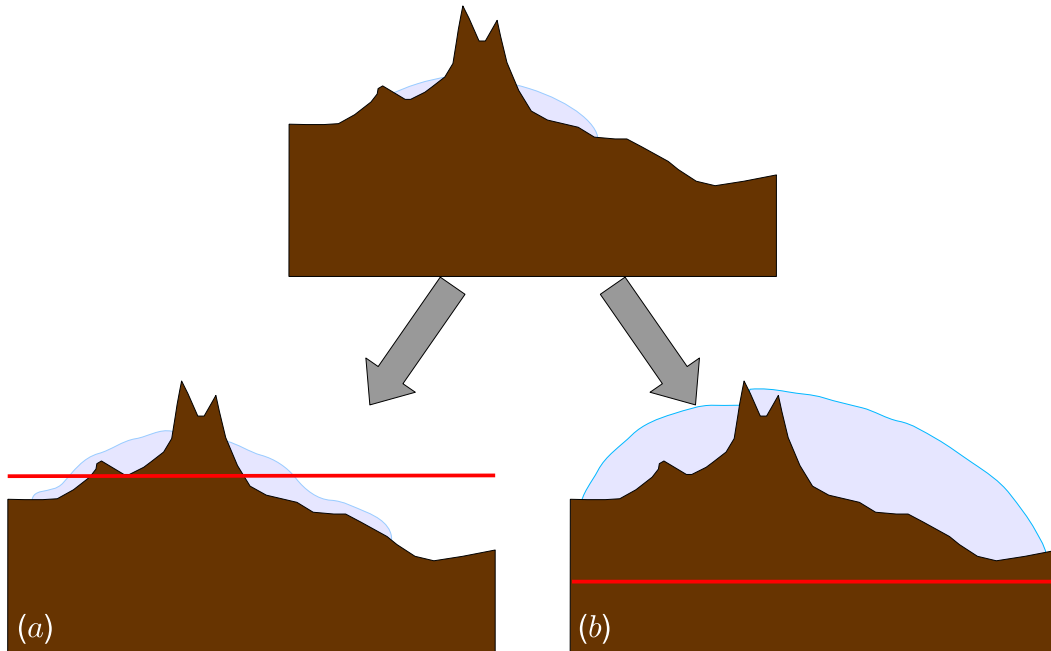


FIG. 1.5: Evolution de la forme d'un glacier vers une forme de glacier de montagne (a) ou vers une forme de calotte (b) en fonction de l'altitude de la ligne d'équilibre (en rouge sur la figure). Les échelles de temps ne sont pas respectées. La formation d'une calotte de glace demande beaucoup plus de temps que celle d'un glacier en raison de son volume plus important et des accumulations faibles auxquelles elle est soumise.

### 1.2.1 Calotte ou glacier de montagne, une interaction dynamique-climat

La Figure 1.1 montre une grande disparité de forme et de taille entre les glaciers de montagne encaissés dans leurs vallées et les calottes glaciaires qui s'étendent sur de grandes surfaces et avec des pentes très faibles. Ces différences géométriques s'expliquent en grande partie par l'association de la topographie qui contrôle l'écoulement de la glace et l'altitude de la ligne d'équilibre. La Figure 1.5 présente de manière schématique et simplifiée comment se mettent en place les glaciers de montagne et les calottes polaires en fonction de l'altitude de la ligne d'équilibre.

Ainsi, sous les latitudes tempérées voire tropicales, la ligne d'équilibre se situe à une altitude assez élevée. La neige accumulée dans la partie haute du glacier va donc se densifier puis se transformer en glace qui, en se déplaçant vers l'aval sous l'effet de son propre poids, va passer en dessous de la ligne d'équilibre et commencer à fondre. Aux plus hautes latitudes, la ligne d'équilibre se situe beaucoup plus bas en vallée, voir en dessous du niveau de la mer pour les grandes calottes où l'on n'observe quasiment pas de fonte. La neige et la glace vont donc s'accumuler sur toute la surface mise à leur disposition et former les calottes polaires.

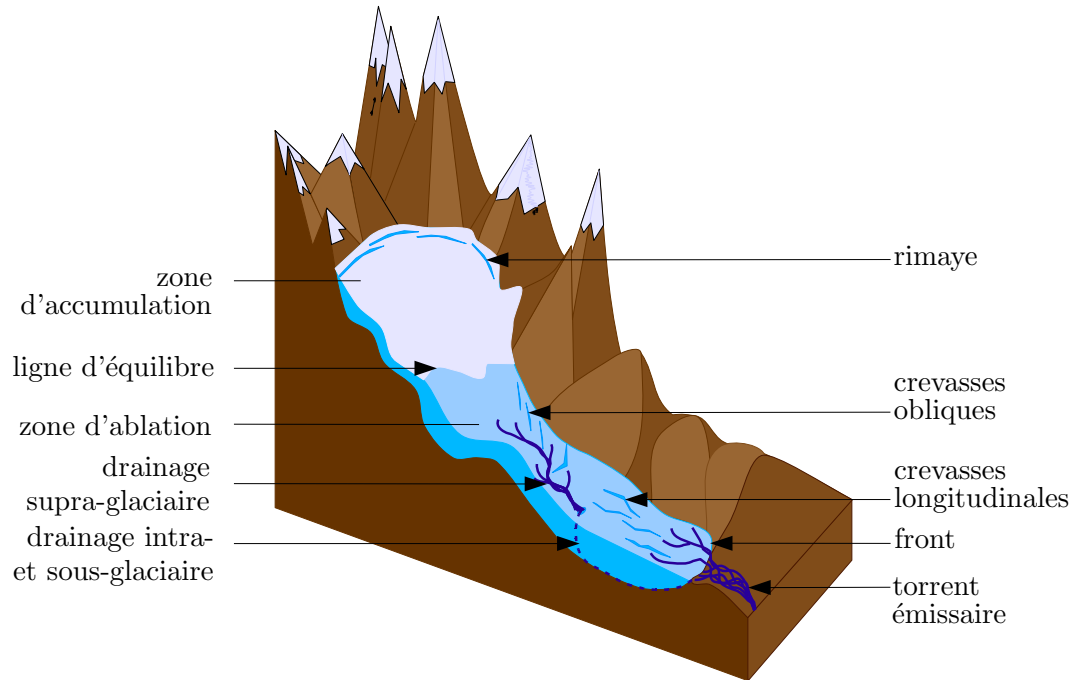


FIG. 1.6: Schéma d'un glacier de vallée à l'automne (la ligne d'équilibre correspond alors à la ligne de neige).

### 1.2.2 L'existence mouvementée de la glace

On va s'intéresser dans cette partie à la morphologie des glaciers. On ne s'attardera pas sur les calottes de glace qui sont formées d'une grande étendue de glace avec une pente très faible au centre et qui reprennent sur leur bords les caractéristiques principales des glaciers de montagne.

La Figure 1.6 montre les caractéristiques principales d'un glacier de montagne. A l'amont, la zone d'accumulation forme une zone relativement plane qui est recouverte de neige en permanence. On observe généralement en haut de la zone d'accumulation une crevasse très profonde, la rimaye. Cette crevasse se forme entre une partie du glacier qui est solidaire de son socle (partie amont généralement appuyée aux parois du cirque glaciaire) et la partie aval qui glisse sur son socle. D'autres crevasses, de différents types, sont présentes sur toute la surface du glacier. Ces crevasses sont les témoins de fortes contraintes dans la glace qui entraînent sa rupture. En bordure de vallée se forment des crevasses latérales (ou obliques) dues au frottement du glacier contre les parois rocheuses. Transversalement à la direction principale d'écoulement, ce sont les augmentations de la pente du socle qui entraînent l'ouverture de crevasses. On peut enfin trouver des crevasses orientées parallèlement à la direction principale de l'écoulement lorsque l'on se rapproche du front du glacier. Ces dernières se forment à la faveur d'un étalement du glacier qui dans les zones de pentes moindres et lorsqu'il n'est plus confiné dans sa vallée a tendance à s'étaler latéralement entraînant l'apparition de nouvelles contraintes (lobes de piémont). Nous parlerons plus en détail des phénomènes de déformation qui sont à l'origine de la formation de

ces crevasses dans la Section 2.1.

En se déplaçant vers l'aval du glacier, on passe en dessous de la ligne d'équilibre pour se retrouver dans la zone d'ablation. Dans cette zone, la totalité de la neige et une partie de la glace fondent durant l'été. L'eau ainsi mobilisée est drainée à la surface du glacier par un réseau de bédrières similaire à un réseau hydrologique terrestre. Cette eau peut ensuite s'enfoncer à l'intérieur du glacier par l'intermédiaire de moulins ou de crevasses qui vont l'amener jusqu'au socle du glacier ou elle est prise en charge par un système de drainage sous-glaciaire avant de ressortir à l'air libre au front du glacier. Nous présenterons dans la Section 2.3.1 les différentes sources d'eau du glacier. Le système de drainage quant à lui, formé des composantes supra, intra et sous-glaciaire sera présenté dans la Section 2.3.2 en mettant plus l'accent sur la composante sous-glaciaire.



## Chapitre 2

# L'hydrologie sous glaciaire, un acteur de la dynamique glaciaire

### 2.1 Les différentes composantes de la dynamique glaciaire

L'écoulement des glaciers est un phénomène facilement observable. De nombreux indices en surface, (crevasses, moraines) mais aussi sur des zones précédemment englacées (linéations, roches moutonnées) permettent de se faire une idée assez précise du mouvement des glaciers dans leurs vallées. Ces évidences font déjà apparaître les différentes composantes de l'écoulement. La présence de crevasses met en évidence la déformation de la glace alors que les roches moutonnées, lissées par le glacier, mettent en évidence le glissement basal. A ces deux processus on peut ajouter une troisième composante due à la déformation d'une éventuelle couche de sédiments à la base du glacier. Ces trois composantes mettent en jeu des processus physiques complexes qui font l'objet de tout un pan de la glaciologie. Ainsi, l'observation séculaire de l'avancée ou du recul des fronts glaciaires trouve peu à peu son explication dans la compréhension des trois composantes de l'écoulement des glaciers par les scientifiques.

#### 2.1.1 La déformation de la glace

Soumise à la gravité, la glace s'écoule sous l'effet de son propre poids. Ces déformations sont mises en évidence en laboratoire sur des échantillons de tailles modestes soumis à des contraintes plus importantes que celles qui sont observées dans la nature. Ces expériences ont permis de définir la loi de comportement de la glace qui permet de lier ses vitesses de déformation aux contraintes qu'elle subit. Tracés sur un diagramme contrainte-déformation (Figure 2.1) les résultats de ces expériences montrent pour la glace un comportement visco-plastique.

La glace est donc un matériau intermédiaire entre les matériaux plastiques parfaits pour lesquels le taux de déformation devient infini à partir d'un seuil de contrainte  $\tau_0$  donné et les fluides Newtoniens dont la déformation augmente linéairement avec l'augmentation de la contrainte.

Le comportement visco-plastique de la glace a été formalisé par Glen (1955) qui a défini la loi de comportement de la glace à partir d'essais de cisaillement. Cette loi établit une relation entre la vitesse de déformation par cisaillement  $\dot{\epsilon}_{xy}$  et la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  correspondante

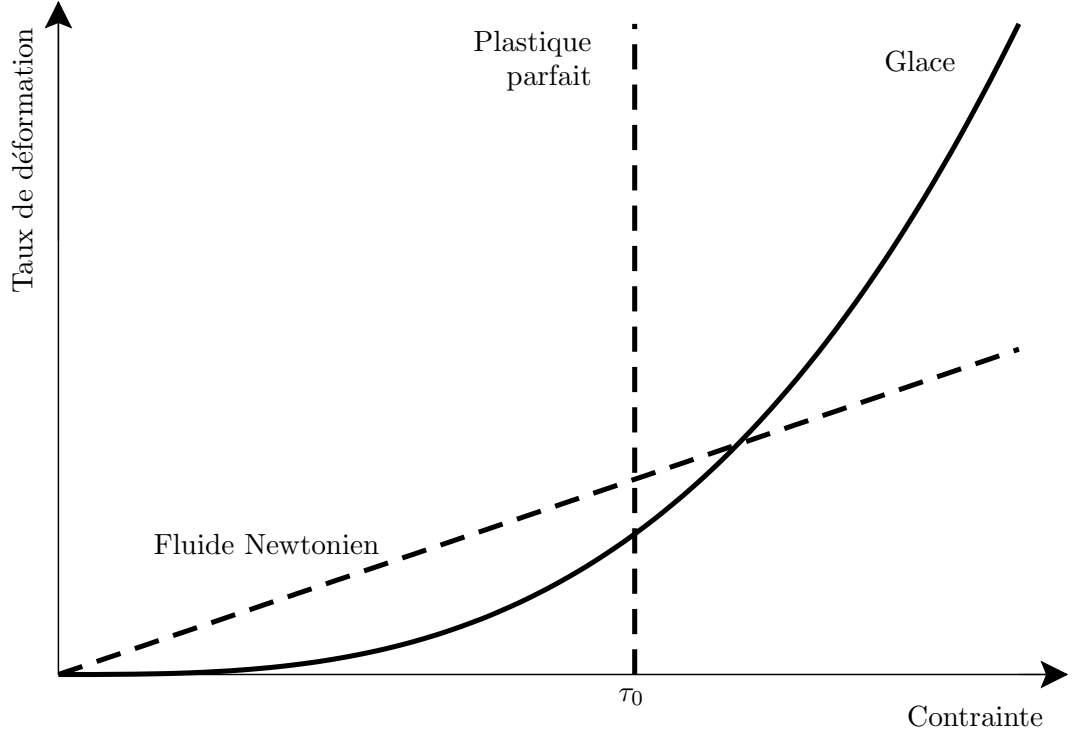


FIG. 2.1: Illustration des lois de comportement pour des matériaux idéaux (plastique parfait et fluide Newtonien) et pour la glace. La loi de comportement de la glace répond à la loi de Glen (Équation 2.1).  $\tau_0$  est le seuil de plasticité à partir duquel le matériau plastique parfait se déforme.

par l'intermédiaire de coefficients obtenus expérimentalements :

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \mathcal{A} \tau_{xy}^n. \quad (2.1)$$

Le coefficient  $\mathcal{A}$  est un paramètre variant en fonction de nombreux facteurs tels que l'orientation des cristaux, leur taille ou encore le contenu en impureté. Mais ces différentes variations sont souvent négligeables devant celle que l'on observe en fonction de la température. Cette dépendance du paramètre  $\mathcal{A}$  à la température est décrite par une loi d'Arrhenius mettant en jeu l'énergie d'activation pour le fluage de la glace  $\mathcal{Q}$ , la constante des gaz parfaits  $\mathcal{R}$ , la température  $T$  et un coefficient  $\mathcal{A}_0$  indépendant de la température :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \exp \left( \frac{-\mathcal{Q}}{\mathcal{R}T} \right). \quad (2.2)$$

L'exposant  $n$  de la loi de Glen est une constante généralement prise égale à 3 bien que sa valeur semble varier entre 1.5 et 4.2 suivant la profondeur à laquelle se trouve la glace dans le glacier (Marshall *et al.*, 2002). La loi de comportement ainsi définie par l'équation (2.1) a été déduite à partir d'essais uniaxiaux effectués en laboratoire. Cette loi doit donc être généralisée

avant que l'on puisse l'appliquer à un système glaciaire soumis à un régime de contraintes réaliste (glacier ou calotte polaire). Cette généralisation demande de passer à une formulation tensorielle.

La loi de Glen sous sa forme tensorielle relie le tenseur des contraintes déviatoires  $\boldsymbol{\tau}$  au tenseur des vitesses de déformations  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  :

$$\tau_{ij} = \mathcal{A}^{1/n} \dot{\epsilon}_e^{(1-n)/n} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.3)$$

L'équation de Glen (2.3) s'écrit en fonction du tenseur des vitesses de déformation défini en fonction des vitesses d'écoulement de la glace :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}, \text{ où } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.4)$$

et de son deuxième invariant défini comme suit :

$$\dot{\epsilon}_e^2 = \frac{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{2}. \quad (2.5)$$

La loi de Glen ainsi reformulée permet donc de calculer de manière théorique les vitesses de déformation de la glace en fonction des contraintes qui lui sont appliquées. Ce calcul se base sur les équations de la dynamique ainsi que sur les propriétés rhéologiques de la glace. Ainsi, les équations de la dynamique associées au fait que la glace est incompressible et possède un nombre de Reynolds très faible permettent de mettre en place les équations de Stokes qui régissent son écoulement. Ce système d'équation se compose d'une équation d'incompressibilité :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0, \quad (2.6)$$

et de l'équation de conservation du moment :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} = 0, \quad (2.7)$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}$  est la contrainte de Cauchy (positive pour une traction) définie en fonction de la pression isotrope  $p = -\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}/3$  (positive pour une compression),  $\rho_i$  la densité de la glace et  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur. La résolution des équations de Stokes associée à la loi de comportement de Glen permet alors de calculer les vitesses de déformation de la glace et la pression isotrope pour tout le glacier.

### 2.1.2 Le glissement basal

Contrairement à la déformation de la glace, le glissement basal est difficile à quantifier expérimentalement. On sait qu'il ne peut se produire qu'en présence d'eau liquide à la base du glacier. En effet, si la glace est en dessous de son point de fusion (de 0°C à la pression atmosphérique à -1.6°C sous 2000 m de glace) la glace est soudée au socle rocheux et ne pourra donc pas glisser (Holdsworth et Bull, 1970). Cette différenciation entre un glacier "glissant" ou "collé" à son socle est donc assez facile à faire. Il est par contre beaucoup plus complexe, lorsque le glissement existe, de quantifier les vitesses correspondantes. En effet, l'élaboration d'expériences de laboratoire permettant de reproduire le glissement basal tout en étant compatibles avec la



réalité est assez complexe. On se fie donc aux quelques expériences existantes comme celle de Budd *et al.* (1979) et à des mesures de terrain en nombre limité du fait de la complexité de l'accès à la base des glaciers.

Les vitesses de glissement obtenues sur le terrain proviennent d'observations directes ou indirectes. Des diverses mesures directes, les plus faciles à effectuer sont celles qui consiste à placer un dispositif de mesure dans un tunnel directement creusé à la base du glacier. Ces mesures ne demandent qu'un équipement léger et donnent directement les vitesses de glissement mais le creusement d'un tunnel qui débouche à la base du glacier est une opération complexe qui n'a été effectué que sur de rares glaciers. On peut citer pour exemple les glaciers Blue (Kamb et LaChapelle, 1964), d'Argentière (Boulton et Vivian, 1973) et ceux mentionnés dans le Tableau 2.1. Un deuxième type de mesures directes de glissement peut être réalisé à partir de trous de forage. L'opération consiste à introduire dans le sédiment une ancre relié à une bobine de fil maintenue dans la glace qui en se déroulant mesure le glissement du glacier (Figure 2.2).

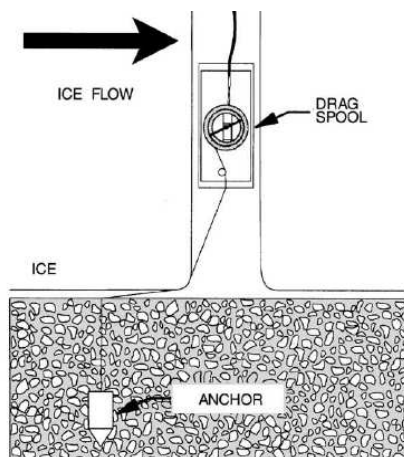


FIG. 2.2: Dispositif de mesure de la vitesse de glissement basale. L'ancre (Anchor) est fixée dans le lit rocheux alors que la bobine (Drag Spool) est solidaire du trou foré dans la glace et mesure l'allongement du fil. Figure issue de Fischer et Clarke (2001)

Le glissement basal peut aussi se mesurer de manière indirecte. Ainsi le suivi de la position de trous de forages en surface mais aussi des variations de leur inclinaison permet de déterminer la vitesse de glissement d'un glacier en retranchant la déformation de la glace à la distance totale parcourue. Une expérience de ce type a été menée par Hess qui a suivi un forage réalisé sur l'Hintereisferner durant une trentaine d'années (Figure 2.3). Sur ce glacier, et durant cette période, on observe un déplacement total de 940 m pour 840 m de glissement.

La dernière méthode pour quantifier le mouvement se développe avec la montée en puissance de l'imagerie satellitaire qui, grâce aux techniques d'interférométrie radar (InSAR), permet de calculer des champs de vitesse de surface sur de grandes étendues. Ces champs de vitesse permettent d'observer des variations temporelles de vitesse qui peuvent être assimilées à des variations de vitesse de glissement si l'on suppose que la dynamique de la déformation de la glace varie peu, ce qui se vérifie bien tant que les deux dates d'acquisition ne sont pas trop éloignées dans le temps.

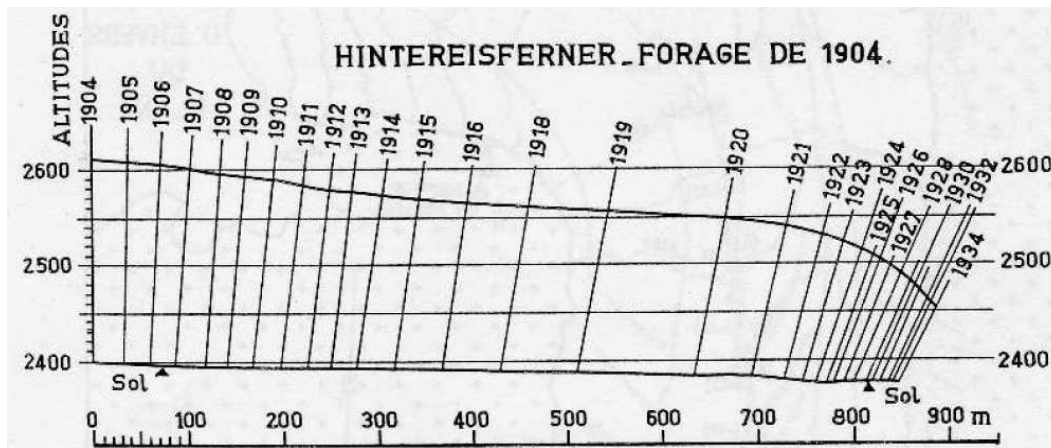


FIG. 2.3: Évolution de la position de la tige de forage mise en place par Hess sur l'Hintereisferner entre 1904 et 1934. Figure d'après Koechlin in (Lliboutry, 1964, p621)

Toutes ces mesures montrent une grande variabilité des vitesses de glissement entre différents glaciers. Les valeurs du rapport entre les vitesses de glissement et les vitesses en surface présentées dans le Tableau 2.1 montrent bien cette variabilité entre les glaciers pour lesquels la vitesse de glissement peut représenter de 3 à 90% des vitesses de surface.

En plus de cette variabilité importante entre les différents glaciers, on peut remarquer une variabilité temporelle assez marquée sur certains glaciers (Blue, Athabasca). Enfin, certains glaciers montrent aussi des variations de vitesses locales qui ne peuvent être expliquées par la topographie de leur socle et qui sont probablement dues à la présence de zones présentant des vitesses de glissement plus importantes. On observe ce type de variation locale sur le glacier d'Arolla où une bande de glace d'une vingtaine de mètre de large présente des vitesses beaucoup plus importantes que celles de la glace environnante (voir Harbor *et al.* (1997); Hubbard *et al.* (1998)).

### 2.1.3 La déformation du sédiment sous-jacent

La déformation d'une couche de sédiments à la base des glaciers comme composante non négligeable de la dynamique glaciaire a été décrite dans le milieu des années 80. La découverte de ce processus est liée à celle d'une couche de sédiments gorgée d'eau à la base d'un fleuve de glace en Antarctique (Alley *et al.*, 1986; Blankenship *et al.*, 1986, 1987). Avant la découverte de cette couche de sédiments, on pensait que les glaciers reposaient sur des socles rigides et donc que l'importance du sédiment était négligeable du point de vue de la dynamique glaciaire. La découverte de ces sédiments remet en cause cette hypothèse et introduit la possibilité qu'une partie du mouvement du glacier provienne de la déformation des sédiments sous-jacents.

Clarke (1987) s'est intéressé aux caractéristiques des sédiments sous-glaciaires du glacier Trapridge (Canada). Son étude montre que ces sédiments ont une granulométrie très étendue allant de particules d'argiles (quelques  $\mu\text{m}$  de diamètre) jusqu'aux blocs de roche (diamètre supérieur à 25 cm). En considérant le sédiment comme un mélange d'eau, de particules fines

TAB. 2.1: Rapport entre vitesses basales et vitesses en surface. Données synthétisées par Paterson (1994).

Glacier	Épaisseur en (m)	Ratio de vitesses	Référence
Aletsch	137	0.5	Gerrard et Perutz (1952)
Athabasca	322	0.75	Savage et Paterson (1963)
Athabasca	209	0.1	Savage et Paterson (1963)
Athabasca	265	0.67	Raymond (1971)
Athabasca	316	0.87	Raymond (1971)
Blue <sup>a</sup>	26	0.9	Kamb et LaChapelle (1964)
Blue <sup>a</sup>	65	0.88	Kamb et LaChapelle (1968)
Blue <sup>a</sup>	65	0.03	Kamb et LaChapelle (1968)
Blue	120	0.07	Engelhardt <i>et al.</i> (1978)
Østerdalsisen <sup>a</sup>	40	0.65	Theakstone (1967)
Salmon	495	0.45	Mathews (1959)
Tuyuksu	52	0.65	Vilesov (1961)
Variegated	356	0.53	Engelhardt <i>et al.</i> (1979)
Variegated <sup>b</sup>	385	0.95	Kamb <i>et al.</i> (1985)
Vesl-Skautbreen <sup>a</sup>	50	0.9	McCall (1952)

<sup>a</sup> mesure effectués dans des tunnels<sup>b</sup> en période de crue

et de solides plus grossiers, Clarke (1987) décrit différentes propriétés de ces sédiments et en particulier le fait que leur déformation est fortement liée au volume d'eau qu'ils contiennent.

La présence de sédiments à la base d'un glacier induit différentes formes de profils de vitesse à l'interface glace-socle suivant l'état du sédiment (Murray, 1997). En effet, comme montré par Clarke (1987), porosités et contenus en eau du sédiment ont une forte influence sur sa capacité à se déformer. De plus, le couplage entre la glace et le sédiment a aussi son importance comme le montrent les cas suivants :

- (i) Si il n'y a pas de couplage entre la glace et le sédiment, on revient au cas où le glacier repose sur un socle rigide (Figure 2.4(a))
- (ii) Si le couplage glace-sédiment est parfait, le seul mouvement basal que l'on observe est dû à la déformation du sédiment (Figure 2.4(b))
- (iii) Si le couplage entre glace et sédiment est plus faible, on observe une vitesse basale due à la fois à la déformation du sédiment et au glissement de la glace (Figure 2.4(c))

Les mécanismes entraînant cet écoulement par déformation des sédiments sont encore mal connus. En effet, comme pour le glissement basal, l'accès difficile au socle des glaciers rend complexe l'échantillonnage et donc l'étude des sédiments sous glaciaires. De plus, l'hétérogénéité de ces sédiments complique les essais de résistance couramment utilisés en mécanique des sols pour caractériser un matériau.

Ces trois processus d'écoulement (déformation, glissement et déformation d'une couche de

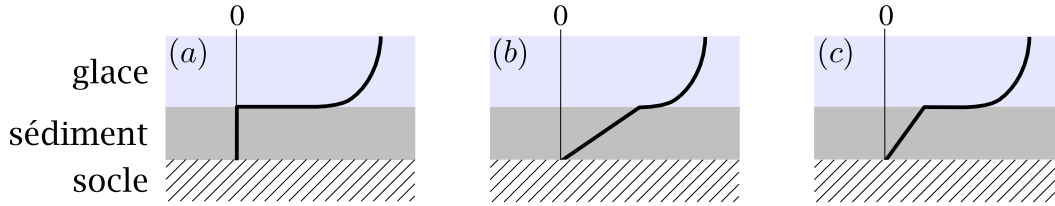


FIG. 2.4: Profils de vitesse idéalisés pour un glacier reposant sur une couche de sédiment. Les échelles verticales ne sont pas respectées. Les trois différents cas sont expliqués dans le texte. Figure issue de Murray (1997)

sédiments) demandent des traitements différents du point de vue de la modélisation. La déformation de la glace répond à des lois connues qui, même si une incertitude demeure sur la valeur de leurs paramètres, peuvent être implémentées dans les modèles numériques. De plus la déformation de la glace ne dépend que de paramètres que l'on peut mesurer (topographie, température de la glace) et qui sont donc faciles à introduire dans un modèle. Le glissement basal est moins évident à modéliser car il rend compte de phénomènes plus difficilement observables et quantifiables. Le but des lois de frottement développées dans la Section 2.2 est de modéliser le glissement basal des glaciers en prenant en compte la méconnaissance de ces paramètres. Contrairement à la topographie de surface qui régit la déformation de la glace, la rugosité du socle qui contrôle le glissement basal est difficilement mesurable. Là où la loi de déformation repose donc sur les mesures de topographie, les lois de frottement devront se baser sur des paramètres statistiques représentant au mieux la rugosité du socle. Enfin, la déformation des sédiments reste un processus peu abordé par les glaciologues et qui demanderait la mise en place de lois de déformation spécifiques aux sédiments sous-glaciaires qui permettraient des avancées dans ce domaine.

## 2.2 Le développement des lois de frottement

L'importance quantitative du glissement basal sur la dynamique glaciaire a poussé les glaciologues à définir des lois de frottements qui permettent de reproduire le glissement basal. Ces lois relient la vitesse de glissement basal  $u_b$  à la contrainte tangentielle moyenne à la base du glacier  $\tau_b$ . On présentera dans cette section un historique de l'évolution de ces lois de frottement pour arriver à la loi que l'on utilisera dans la suite de ce travail.

### 2.2.1 Théorie de Weertman

Weertman (1957b) fût le premier à développer une théorie qui pourrait expliquer le glissement basal. L'observation du lit rocheux des glaciers, surface irrégulière et rugueuse, ne laisse pas présager d'un glissement significatif. Pour expliquer les vitesses de glissement observées, Weertman (1957b) propose une théorie basée sur deux mécanismes qui pourraient expliquer ce glissement, un phénomène de fusion regel d'une part et d'adoucissement de la glace d'autre part. En vue de simplifier le problème, Weertman (1957b) pose les hypothèses suivantes pour développer sa théorie :

- (i) Le lit rocheux sur lequel repose le glacier est constitué d'un plan incliné sur lequel sont disposés à intervalles réguliers des obstacles de forme cubique comme présenté sur la Figure 2.5.

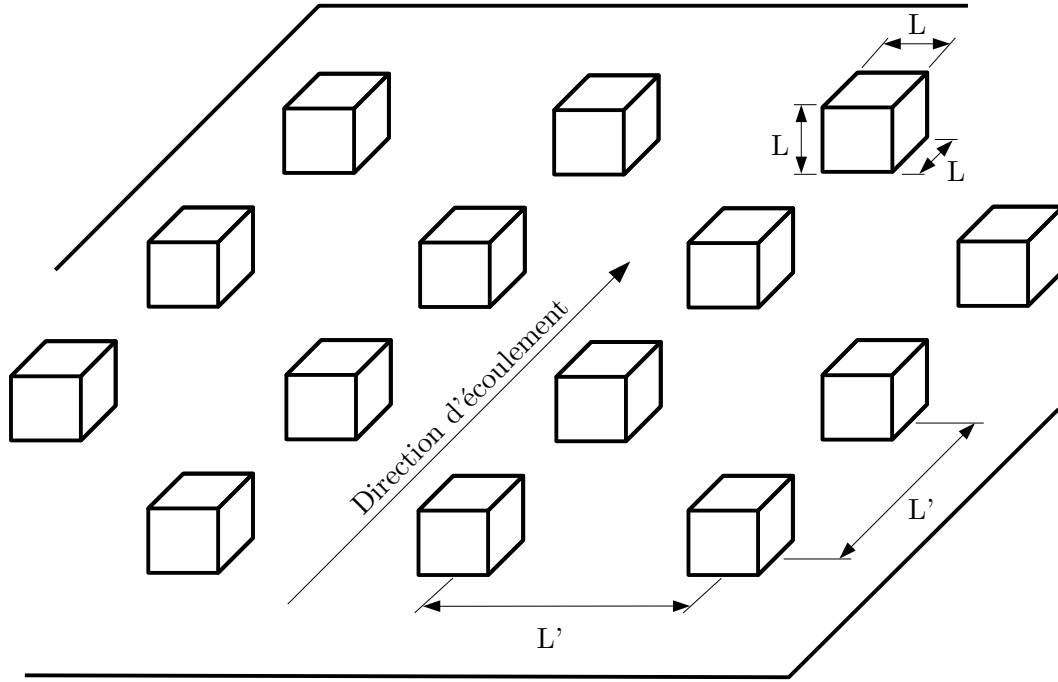


FIG. 2.5: Socle rocheux défini par Weertman pour développer sa théorie du glissement. Figure adaptée de Weertman (1957b).

- (ii) La glace en contact avec le socle est supposée propre et le substrat rocheux indéformable.
- (iii) La glace et la roche sont séparées en tous points par un film d'eau d'une épaisseur de l'ordre de  $1 \mu\text{m}$  qui permet au glacier de glisser parfaitement sur son socle là où il n'est pas bloqué par un obstacle.
- (iv) La glace et le socle rocheux ne sont en aucun point séparés par autre chose que le film d'eau.

A partir de ces hypothèses, Weertman (1957b) développe une théorie mettant en jeu deux modes de glissement différents :

- (i) Un processus de fusion-regel qui met en jeu la variation de la température de fusion de l'eau en fonction de la pression. Ce processus est observable dans le cas d'un glacier pour lequel la glace est au point de fusion à sa base. Dans cette configuration, la présence de protubérances sur le lit rocheux va entraîner la mise en place de différences de pression de part et d'autre de l'obstacle. A l'amont, la pression est plus importante, abaissant ainsi la température du point de fusion de la glace qui peut alors fondre. L'eau ainsi mobilisée se déplace vers l'aval où la pression est moins importante. Ainsi, à l'aval du bombement et sous l'effet de la pression moins importante, l'eau regèle en dégageant de la chaleur qui

se transmet vers l'amont à travers la bosse (Figure 2.6(a)). Sur le diagramme de phase de l'eau (Figure 2.6(b)) le changement d'état est représenté par une flèche à double sens représentant un changement d'état isotherme.

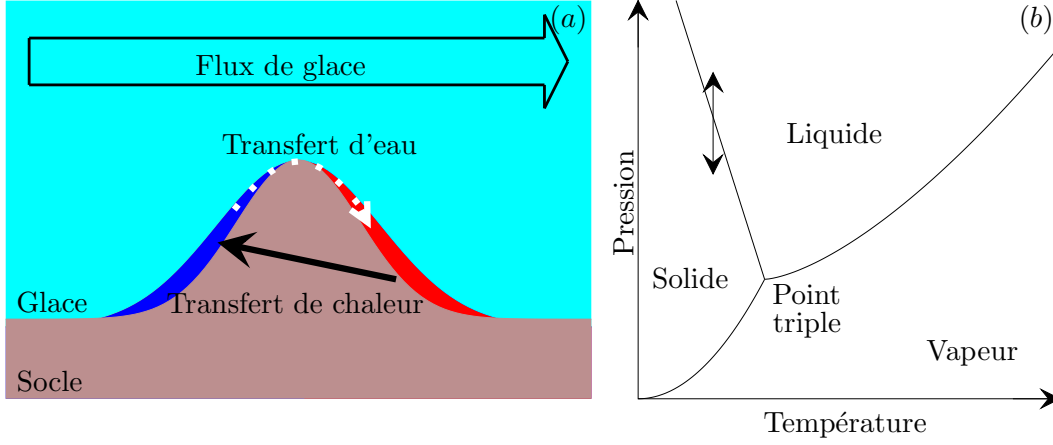


FIG. 2.6: Illustration du mécanisme de fusion-regel (a) et du diagramme de phase de l'eau (b). Dans le schéma (a), la zone bleue correspond à la de fusion de la glace et la zone rouge à la zone de regel. Les flèches indiquent le transfert de chaleur (flèche noire pleine) et le mouvement de l'eau (pointillés blancs).

La taille de l'obstacle va donc jouer un rôle important dans cette théorie. En effet, le flux de chaleur ne pourra pas s'établir à travers un obstacle de trop grande taille et le glissement sera donc réduit à une valeur négligeable pour des obstacles de grandes dimensions. Comme nous allons le montrer, cette dernière affirmation se vérifie si l'on développe la théorie du glissement par fusion-regel. Cette théorie est basée sur la différence de la température du point de fusion de la glace observée entre l'amont et l'aval d'un des obstacles cubiques. Cette différence de température est due à l'établissement de contraintes autour des obstacles. Étant donné l'espacement  $L'$  des cubes chaque cube contrôle une surface  $L'^2$  du socle. Avec  $\tau_b$  la valeur moyenne de la contrainte tangentielle, chaque cube subit alors une force  $\tau_b L'^2$ . C'est cette force qui engendre une contrainte de compression sur la face amont de l'obstacle et une contrainte de traction symétrique sur la face aval. Étant donné la surface de l'obstacle, les contraintes sur chaque face prennent comme valeur  $\tau_b L'^2 / 2L^2$ . La différence de température du point de fusion  $\Delta T$  s'écrit en fonction de la différence de contraintes entre les faces aval et amont de l'obstacle :

$$\Delta T = C_l \tau_b \frac{L'^2}{L^2}, \quad (2.8)$$

le coefficient  $C_l$  est défini par la relation de Clapeyron comme :

$$C_l = \frac{T \Delta V}{L_i}, \quad (2.9)$$

ou  $T$  et  $\Delta V$  sont respectivement la température et la variation de volume durant le changement d'état et  $L_i$  la chaleur latente de fusion de la glace.

Si l'on considère uniquement la vitesse de glissement  $u_{bfr}$  due à ce processus, alors un volume d'eau  $u_{bfr}L^2$  est produit sur la face amont d'un cube par unité de temps. Ce volume d'eau est alors regelé sur la face aval du cube en libérant une quantité d'énergie  $u_{bfr}L^2\rho_iL_i$  où  $\rho_i$  est la densité de la glace. A partir de l'équation (2.8) et de la vitesse de transfert de la chaleur à travers le socle  $K_bL$  où  $K_b$  est la conductivité thermique du socle, on peut évaluer le terme de production et le terme de transfert de chaleur :

$$u_{bfr}L^2\rho_iL_i = K_bL\Delta T, \quad (2.10)$$

la recombinaison des équations (2.8) et (2.10) donne alors l'expression de la vitesse de glissement :

$$u_{bfr} = \frac{C_l K_b \tau_b L'^2}{L_i \rho_i L L^2}. \quad (2.11)$$

Cette dernière expression montre donc bien que la vitesse de glissement due au processus de fusion regel diminue si la taille de l'obstacle augmente.

- (ii) Un phénomène "d'adoucissement" de la glace à mesure que l'on s'approche du socle. Ce phénomène est lié à l'apparition de contraintes sur les irrégularités du socle. En prenant en compte la géométrie définie par Weertman (1957b) présentée sur la Figure 2.5 l'augmentation de contraintes à l'amont d'un obstacle s'écrit :  $\tau_b L'^2/2L^2$ . A partir de cette excès de contraintes, et de la loi de comportement de la glace définie par Glen (1955) (équation (2.1)) la déformation de la glace à proximité de l'obstacle est de la forme :  $\mathcal{A}(\tau_b L'^2/2L^2)^n$ . Le rayon d'effet de cette déformation doit alors être connu pour qu'une vitesse de glissement soit calculée. Weertman (1957b) a utilisé pour cela des valeurs de contraintes mesurées sur la fermeture d'un trou de forage par Nye (1953). Ces expériences montrent que le rayon d'effet de l'obstacle est égal à sa taille. La vitesse de glissement  $u_{ba}$  due à l'adoucissement de la glace s'écrit alors :

$$u_{ba} = \mathcal{A}L \left( \tau_b \frac{L'^2}{2L^2} \right)^n. \quad (2.12)$$

Cette expression montre que si le rapport  $L'/L$  est gardé constant, alors une augmentation de la taille des obstacles entraînera un glissement plus important du glacier.

Les vitesses de glissement calculées par les équations (2.11) et (2.12) ne prennent en compte qu'un seul des deux phénomènes supposé par Weertman. Pour combiner ces deux équations il considère l'évolution des vitesses calculées en fonction de la taille des obstacles et tout en gardant un rapport  $L'/L$  constant (Figure 2.7).

Weertman (1957b) considère alors un socle sur lequel les obstacles présentent une gamme importante de tailles différentes. Dans cette configuration, si le glissement est contrôlé par des obstacles situés à gauche de l'intersection des deux courbes de la Figure 2.7 la vitesse de glissement sera contrôlée par le processus de fusion-regel car les vitesses qu'il engendre sont plus importantes que celles dues au processus d'adoucissement. Ainsi les obstacles qui vont limiter le glissement seront ceux qui ont la plus grande taille et qui se trouvent donc à l'intersection des deux courbes. Par le même raisonnement, on observe que si les obstacles contrôlant le glissement

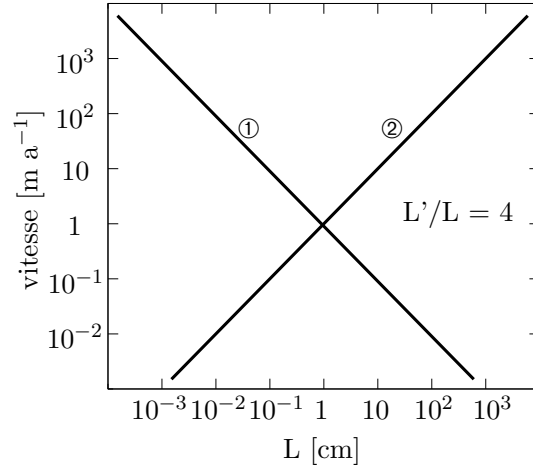


FIG. 2.7: Évolution des vitesses de glissement en fonction de la taille des obstacles ① pour le phénomène de fusion-regel et ② pour le phénomène d'adoucissement. Le ratio  $L'/L$  est gardé constant. Figure issue de Weertman (1957b)

sont à droite de l'intersection des deux courbes, le glissement est dû majoritairement au processus d'adoucissement et donc les obstacles limitant le déplacement seront les plus petits, ce qui nous ramène au point d'intersection lorsque l'on cherche la taille des obstacles qui limitent le glissement. Weertman (1957b) égale donc les équations de glissements (2.11) et (2.12) pour obtenir la dimension critique  $L_c$  de l'obstacle au point d'intersection des deux courbes de la Figure 2.7 :

$$L_c = \mathcal{A}^{-1/2} \left( \frac{C_l K_b \tau_b}{L_i \rho_i} \right)^{1/2} \left( \frac{\tau_b}{2} \right)^{-n/2} \left( \frac{L'}{L} \right)^{1-n}, \quad (2.13)$$

cette taille critique est alors injectée dans l'une des deux équations décrivant le glissement (équations (2.11) ou (2.12)) pour obtenir la vitesse de glissement  $u_b$  à la base du glacier :

$$u_b = \left( \frac{2\mathcal{A}C_l K_b}{L_i \rho_i} \right)^{1/2} \left( \frac{\tau_b}{2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{L'}{L} \right)^{n+1}. \quad (2.14)$$

Dans cette équation,  $L'$  et  $L$  représentent la taille caractéristique des irrégularités du socle comme définies sur la Figure 2.5,  $\mathcal{A}$  et  $n$  sont respectivement le coefficient et l'exposant de la loi de Glen. De plus, la glace est caractérisée par sa densité  $\rho_i$ , sa chaleur latente de fusion  $L_i$  et la constante  $C_l$  issue de la relation de Clapeyron. Le dernier paramètre  $K_b$  représente quant à lui la conductivité thermique du socle rocheux.

L'observation des phénomènes de fusion-regel et d'adoucissement de la glace par Kamb et La-Chapelle (1964) confirment la théorie de Weertman. Par contre les valeurs de glissement calculées à partir de l'équation (2.14) donnent des vitesses qui semblent trop faibles par rapport à celles qui sont observées. De plus la géométrie du lit rocheux utilisée par Weertman pose problème lors de la confrontation à la réalité. Enfin, le poids important du ratio  $L'/L$  dans l'équation finale



(exposant  $n + 1$ ) rend ce terme très significatif dans le calcul du glissement alors que sa réalité physique est peu probable.

Pour pallier l'approximation géométrique du lit rocheux, Nye (1969, 1970) et Kamb (1970) utilisent le même raisonnement que Weertman (1957b) mais en utilisant cette fois une caractéristique du socle qui pourra être mesurée, la rugosité. Pour mesurer cette valeur, ils considèrent une surface de socle rocheux prise telle qu'elle soit assez grande pour être représentative du socle dans son ensemble et assez petite pour que les vitesses de glissement sur toute la surface soient uniformes. Cette donnée de rugosité ne doit pas être confondue avec la topographie du socle. En effet, la rugosité est représentée par des paramètres statistiques sur toute la surface du socle. La topographie quant à elle est constituée de variations de plus grande amplitude qui peuvent être mesurées et cartographiées en tous points du socle rocheux. Cette méthode permet d'appliquer les lois de glissement sans connaître la configuration de chaque obstacle présent sur le socle rocheux. Fowler (1981) donne une expression simple de cette loi de frottement sous la forme :

$$u_b = C\tau_b^{\frac{n+1}{2}}, \quad (2.15)$$

ou  $C$  est une constante positive et  $n$  l'exposant de la loi de Glen.

### 2.2.2 Discussion sur les hypothèses de Weertman

Ces théories, auxquelles nous pouvons ajouter celles de Lliboutry (1975) et Morland (1976) qui apportent de nouvelles généralisations souffrent toutefois de certains défauts. En effet la comparaison entre calculs et données n'a jamais donné de résultats quantitativement concluants bien que les phénomènes décrits aient bien été observés (Kamb, 1970). Ce biais entre modélisation et observation est probablement dû à la mise en place d'hypothèses trop fortes lors de l'élaboration de la théorie. Paterson (1994) a synthétisé plusieurs arguments dans ce sens que l'on va reprendre ici.

- (i) Il semble assez improbable que la glace à la base des glaciers ne contienne aucune impureté. Les observations qui ont été faites à la base de glaciers tempérés révèlent en effet la présence d'une couche de glace d'épaisseur significative chargée de sédiments. Cette glace "sale" aurait des caractéristiques différentes de la glace propre qui pourraient expliquer une partie des biais observés.
- (ii) Le film d'eau à la base du glacier qui doit être présent en tous points du socle paraît difficile à admettre. En effet Robin (1976) émet des doutes quant au fait que la base d'un glacier soit tempérée en tous points et donc que le film d'eau soit partout présent. Le calcul de l'épaisseur de ce film d'eau effectué par Nye (1973a) et qui donne en certains points des épaisseurs négatives semble confirmer cette hypothèse.
- (iii) L'hypothèse sur la continuité du film d'eau est aussi mise à mal par le fait qu'il est fort probable que des cavités se forment à l'aval des obstacles du socle rocheux.
- (iv) Des expériences menées par Kamb et LaChapelle (1964) montrent que les vitesses dues au processus de fonte-regel obtenues expérimentalement ne sont pas en accord avec les vitesses calculées. Les expériences faites par Kamb et LaChapelle (1964) sur un cube chargé emprisonné dans la glace sont confirmées par les expériences standards faites par Drake et

Shreve (1973) dans lesquelles on mesure la vitesse d'avancement d'un câble chargé à travers un bloc de glace (Figures 2.8). Ces deux expériences montrent des vitesses bien moindres que celles que l'on obtient en appliquant la loi donnée par Weertman (1957b).

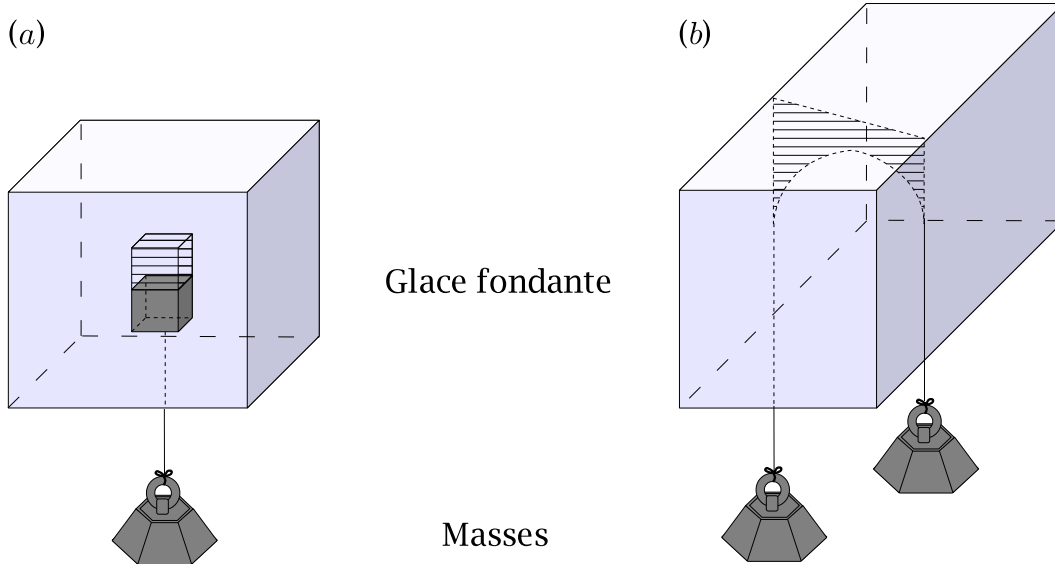


FIG. 2.8: Expériences permettant de calculer la vitesse due au processus de fusion-regel. (a) déplacement d'un cube lesté emprisonné dans la glace et (b) déplacement d'un câble chargé. La glace utilisée est tempérée ( $0^{\circ}\text{C}$ ) et les parties hachurées correspondent aux zone regelées.

### 2.2.3 Importance de la pression effective

Au vu des lacunes présentes dans les hypothèses de Weertman (1957b), la communauté des glaciologues a cherché à développer de nouveaux schémas qui permettraient de se passer de ces hypothèses. L'hypothèse la plus contraignante à première vue est celle de la continuité du film d'eau et de l'absence d'autres séparations possibles entre socle et glacier. Lliboutry (1968) présente une nouvelle formulation de la loi de frottement dans laquelle la séparation entre le socle rocheux et la glace est maintenant possible. Weertman (1966) se penche lui aussi sur ce problème de cavitation. Il généralise sa théorie à un film d'eau d'une épaisseur plus importante. En utilisant les développements faits par Nye (1969, 1970) et Kamb (1970), il montre qu'un film d'eau d'une épaisseur appréciable peut noyer les plus petites irrégularités présentes sur le socle rocheux et donc réduire sa rugosité. Ces nouvelles théories nécessitent de calculer la position de la base du glacier qui n'est plus la même que celle du socle rocheux. L'eau qui avait jusqu'alors uniquement un rôle dans le processus de fonte-regel prend une importance plus grande dans ces études. En effet, la pression d'eau va ici déterminer si le glacier est en contact ou non avec son socle. Une pression dite effective est déterminée pour localiser les zones où les cavités se forment. La pression effective  $N$  correspond à la différence entre la contrainte normale exercée par le

glacier sur son socle et la pression d'eau :

$$N = -\sigma_{nn} - p_w . \quad (2.16)$$

Dans cette expression,  $\sigma_{nn}$  est la composante normale du tenseur des contraintes, et  $p_w$  correspond à la pression de l'eau à la base du glacier. Le signe négatif de  $\sigma_{nn}$  s'explique par le fait que le vecteur normal au socle pointe vers le haut. Dans la définition de la pression effective, le terme  $p_i$  correspondant à la pression hydrostatique de glace (ou pression glaciostatique) remplace souvent le terme  $-\sigma_{nn}$ . En effet cette approximation permet de simplifier de manière importante les calculs tout en gardant une valeur très proche de la réalité dans la plupart des cas. Une pression effective faible ou nulle (équivalente à une pression d'eau élevée) entraînera localement la formation de cavités.

L'introduction dans les lois de frottement du phénomène de cavitation a donc demandé l'introduction de la pression effective dans ces lois. La nouvelle expression de la loi de frottement est de la forme :

$$\tau_b = f(u_b, N) . \quad (2.17)$$

En se basant sur cette nouvelle formulation, l'effet de la pression effective est introduit dans les modèles glaciologiques. La méthode utilisée fait intervenir une combinaison heuristique prenant en compte la définition de la loi de frottement donnée par Fowler (1981) (équation (2.15)) et la pression effective. Cette loi s'écrit sous la forme :

$$\tau_b = C u_b^m N^n , \quad (2.18)$$

avec  $C$ ,  $m$  et  $n$  des constantes positives. Cette loi est couramment utilisée pour modéliser le glissement des glaciers tempérés (Bindshadler, 1983; Fowler, 1987; Paterson, 1994; Le Meur et Vincent, 2003).

Toutefois, cette formulation souffre encore d'imprécisions. En effet, elle est en désaccord avec les travaux de Iken (1981) qui a montré à partir d'un modèle simple basé sur une géométrie en marches d'escalier que le terme  $\tau_b/N$  devait être borné. Cette borne est telle que le terme  $\tau_b/N$  sera toujours plus petit que la pente locale ascendante maximale du socle. Si on se base sur la Figure 2.9 on aura donc toujours  $\tau_b/N < \tan\beta$ .

En prenant en compte la borne supérieure donnée par Iken (1981), Fowler (1986) développe un modèle à partir de la théorie de Nye et Kamb (Kamb, 1970; Nye, 1969). Son modèle décrit le mouvement d'une masse de glace de viscosité uniforme glissant sur un socle périodique de faible pente et dont la longueur d'onde des obstacles est faible par rapport à l'épaisseur de glace. Il ressort de ce modèle une nouvelle définition de la loi de frottement :

$$\frac{\tau_b}{\nu N} = f\left(\frac{u_b \eta \nu}{N[x]}\right) \text{ avec, } \nu = \frac{[y]}{[x]}, \quad (2.19)$$

dans laquelle  $[x]$  est une grandeur caractéristique horizontale,  $[y]$  l'amplitude des oscillations et  $\eta = 1/A\tau^{n-1}$  la viscosité de la glace définie par la loi de Glen.

L'inconvénient de cette nouvelle formulation est qu'elle n'a été développée par Fowler (1986) que dans le cas de socles rocheux pseudo-sinusoidaux et que sa validité n'est pas acquise sur des socles réels. Une évolution de ce modèle a été mise en place par Schoof (2005) sur des topographies

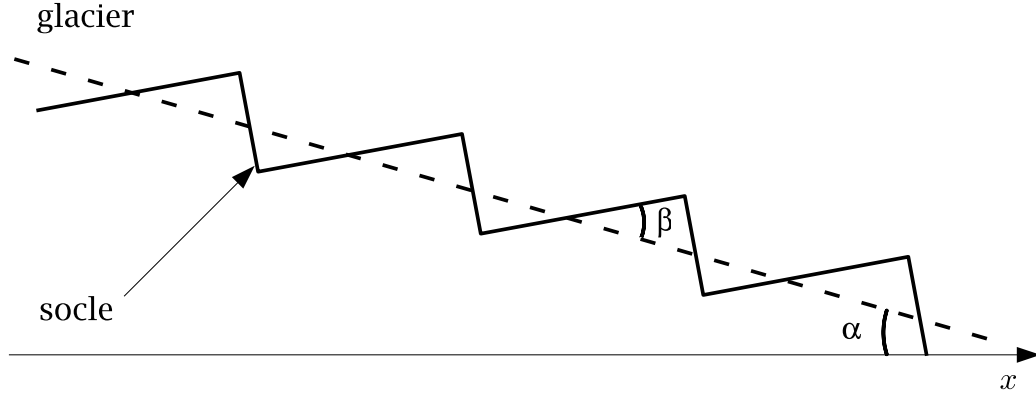


FIG. 2.9: Topographie du lit rocheux utilisé par Iken (1981) pour obtenir la borne supérieure de la loi de frottement. La ligne pointillée correspond à la pente moyenne du socle ( $\tan\alpha$ ).

se rapprochant plus de la réalité. Cette dernière étude a aussi permis de confirmer la borne de Iken (1981). Gagliardini *et al.* (2007), suivant l'approche de Schoof (2005) proposent alors une paramétrisation de la loi de frottement qui permet son utilisation dans un modèle glaciologique. Cette paramétrisation, que j'utiliserai par la suite, est définie comme suit :

$$\frac{\tau_{bi}}{N} = C \left( \frac{\chi_i}{1 + \alpha_q \chi_i^m} \right)^{1/n}, \quad (2.20)$$

avec

$$\chi_i = \frac{u_{bi}}{C^n N^n A_s} \quad \text{et} \quad \alpha_q = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}. \quad (2.21)$$

Dans ces équations,  $\tau_{bi} = \mathbf{t}_i \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|_b$  est la contrainte basale dans la direction tangentielle  $i$  ( $i = 1, 2$ ) et  $u_{bi} = \mathbf{u}(z_b) \cdot \mathbf{t}_i$  la vitesse basale tangentielle, avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal au socle et pointant vers le haut,  $\mathbf{t}_i$  les vecteurs tangentiels et  $z_b$  l'altitude du socle rocheux. Les paramètres  $A_s$  et  $n$  sont respectivement le taux de glissement en l'absence de cavitation et l'exposant de la loi de frottement qui est le même que celui de la loi de Glen.  $C$  correspond à la borne supérieure définie par Iken (1981) et  $m$  est l'exposant qui contrôle la décroissance de la loi de frottement après qu'elle ait atteint son maximum. Ainsi,  $m = 1$ , correspond à une décroissance nulle, plus  $m$  est grand plus la décroissance est rapide (voir Figure 2.10).

J'utiliserai par la suite la loi de frottement définie par l'équation (2.20). Cette loi présente l'avantage de proposer une paramétrisation simple tout en prenant en compte un grand nombre de contraintes physiques. La prise en compte de la pression effective et donc de l'eau sous-glaciaire est un point important de cette loi. En effet, une fois couplée à un modèle d'hydrologie efficace, cette loi permettra de modéliser les variations des vitesses de glissement dues au régime hydraulique du glacier sans qu'il soit nécessaire de modifier les coefficients de la loi de frottement.

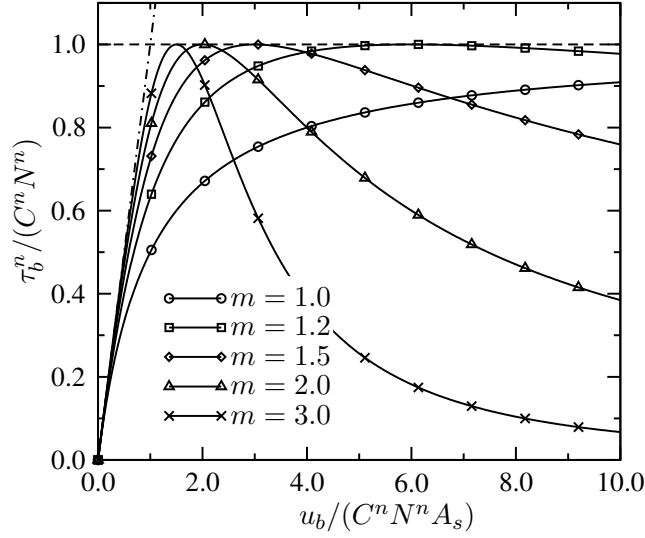


FIG. 2.10: Loi de frottement proposée par Gagliardini *et al.* (2007) en fonction de différentes valeurs de l'exposant  $m$ . La définition des axes permet de ne pas modifier la forme de la courbe en fonction des valeurs de  $C$  et  $A_s$ . La ligne tiretée-pointillée correspond à la loi de frottement sans cavitation :  $u_b = A_s \tau_b^n$ . La ligne tiretée quant à elle correspond elle à la valeur maximale atteinte par  $\tau_b / CN$ .

## 2.3 Les systèmes hydrauliques glaciaires.

La Section 2.2 nous a montré la nécessité de connaître avec précision la répartition de la pression effective à la base des glaciers. En effet, cette pression est la variable principale des lois de frottement et contrôle donc la vitesse basale du glacier. La pression d'eau à la base du glacier doit donc être connue précisément en vue de permettre le calcul de cette pression effective. Ainsi, le volume d'eau apporté à la base des glaciers mais aussi les processus de drainage qui se mettent en place à l'interface entre glace et socle rocheux devront être connus et modélisés pour que la répartition de la pression d'eau soit calculée.

### 2.3.1 La production d'eau des glaciers

L'eau que l'on retrouve à la base des glaciers provient de différentes sources qui peuvent être caractérisées en fonction de leur origine. Une source de surface et une source basale peuvent ainsi être mises en évidence.

A la surface du glacier, la fonte de la neige et de la glace ainsi que les précipitations sous forme liquide peuvent constituer une source importante d'eau pour le glacier. Ces deux phénomènes (fonte et précipitation) ont une forte dépendance saisonnière mais aussi journalière. Ainsi, sur la Figure 2.11 les effets dus aux précipitations et ceux qui sont dus à la fonte sur le glacier d'Arolla (Suisse) peuvent être découplés. Avant le 21 Juin, le débit observé dans le torrent issu du glacier montre une forte variabilité en fonction des épisodes pluvieux. Ensuite, le débit est contrôlé par des variations journalières dues à une augmentation de la fonte dans la journée sous l'effet des

fortes chaleurs.

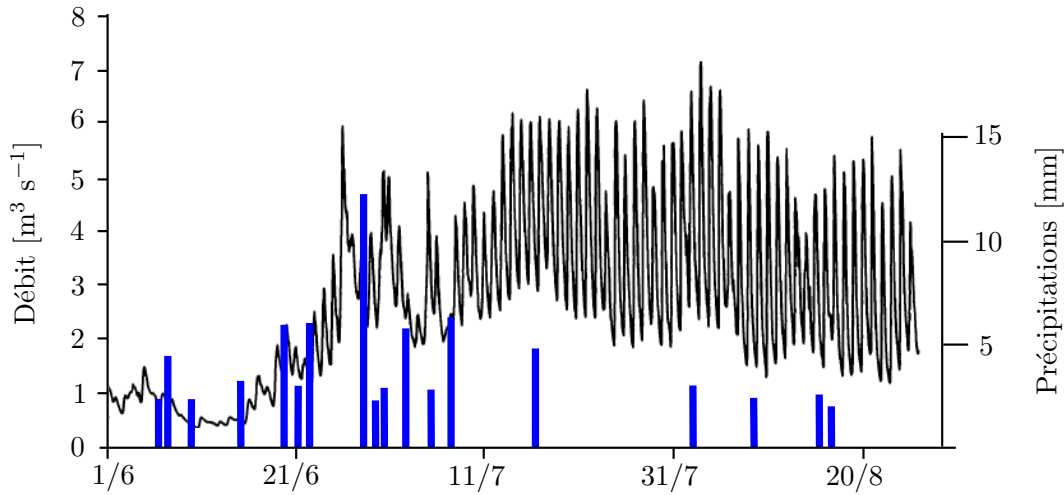


FIG. 2.11: Débits mesurés 950m à l'aval du glacier d'Arolla durant l'été 1990 et précipitations observées durant la même période (en bleu). Ces données sont issues de Richards *et al.* (1996)

Ces volumes d'eau produits en surface vont alors rejoindre la base du glacier en utilisant deux modes de drainage différents. L'eau va tout d'abord être drainée en surface par un réseau de bédrières similaire à un réseau hydrographique terrestre. Ensuite elle s'enfonce dans le glacier par un système de moulins et de crevasses qui l'amène jusqu'à la base du glacier où elle est alors prise en charge par un système de drainage sous-glaciaire qui sera abordé dans la Section 2.3.2. Le système de drainage intra-glaciaire peut être plus ou moins efficace suivant les glaciers et la saison entraînant des temps de transfert et des volumes d'eau transférés plus ou moins importants entre la surface et la base du glacier.

A la base du glacier, l'eau produite correspond à un apport beaucoup plus constant dans le temps. Ici, la production d'eau est due à deux mécanismes :

- (i) le flux géothermique généré par la terre engendre une quantité d'énergie suffisante pour fondre un certain volume de glace. A partir d'estimation du flux géothermique  $\mathcal{Q}_G$  et de la chaleur latente de fusion de la glace  $L_i$ , on peut estimer le flux d'eau par unité de surface  $Q_{hg}$  généré par cette source sous la forme :

$$Q_{hg} = \frac{\mathcal{Q}_G}{\rho_i L_i}, \quad (2.22)$$

En utilisant la valeur moyenne du flux géothermique terrestre ( $6 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$ ) et en considérant que la glace à la base du glacier est à la température de fusion, alors la lame d'eau générée est d'environ  $6.4 \text{ mm a}^{-1}$ . Cette valeur peut être plus importante. En Islande par exemple où le flux géothermique est plus important ( $2 \times 10^{-1} \text{ W m}^{-2}$ ) la fonte de la glace entraîne la formation d'une lame d'eau d'environ  $2 \text{ cm a}^{-1}$  toujours en supposant que la température à la base du glacier est celle du point de fusion.

- (ii) le frottement du glacier sur son socle génère de l'énergie qui est dissipée en fondant une portion de la glace basale. Ce flux d'eau par unité de surface  $Q_{hf}$  est directement proportionnel au produit de la vitesse par la contrainte basale :

$$Q_{hf} = \frac{\tau_b u_b}{\rho_i L_i}. \quad (2.23)$$

Pour cette deuxième source, si l'on considère un glacier alpin typique (200 m d'épaisseur de glace, pente du socle de l'ordre de 5% et glissement basal de l'ordre de la dizaine de mètres par an) le frottement basal génère une lame d'eau de l'ordre de 3 mm a<sup>-1</sup>. Ce deuxième processus agit comme une boucle de rétroaction positive, plus le glacier glisse vite, plus il va créer d'eau à sa base augmentant ainsi la pression d'eau basale et donc la vitesse de glissement.

Ces deux flux de chaleurs doivent être bien dissociés. En effet, le flux géothermique est une valeur externe au modèle qui ne sera pas impactée par la dynamique glaciaire. L'énergie dégagée par le frottement par contre est directement liée à la dynamique glaciaire et engendrera donc des boucles de rétroaction complexes.

### 2.3.2 Les systèmes de drainage sous-glaciaire

La majorité de l'eau produite sur les glaciers est drainée vers la base par un réseau de moulins et de crevasses. Une fois la base atteinte, l'eau produite en surface rejoint celle qui est produite à l'interface entre la glace et le lit rocheux pour être drainée jusqu'au front du glacier. Les systèmes de drainage qui existent à la base des glaciers sont mal connus du fait de la difficulté de leur accès. La connaissance de ces systèmes vient donc de trois types d'analyses :

- (i) l'observation de zones précédemment englacées
- (ii) des observation hydrologiques menées sur les glaciers (temps de parcours de traceurs, mesures de débit, mesures de pression dans des trous de forage)
- (iii) l'approche théorique par la modélisation qui peut valider les observations et donc les systèmes de drainage supposés.

Ces observations ont permis de décrire différents types de systèmes de drainage qui sont susceptibles de se mettre en place à la base des glaciers.

#### 2.3.2.1 Les films d'eau

Les films d'eau en tant que mode de drainage de l'eau ont été développés par Weertman (1972) pour expliquer le mouvement de l'eau suite à sa théorie de production par fonte-regel autour des rugosités du socle (Weertman, 1957b). Ces films d'eau se présentent comme des nappes d'eau d'une épaisseur de l'ordre du micromètre à l'interface entre la glace et le socle rocheux. Des observations indirectes de dépôts de calcite (Vivian, 1975; Hallet, 1979; Sharp *et al.*, 1990) permettent de confirmer l'existence de ce type de réseau. L'observation fine de ces dépôts donne de plus amples informations quant à leur caractéristiques. Ces dépôts présentent des linéations qui laissent penser que le film d'eau entre socle et glacier est très fin. De plus des particules de tailles plus importantes (10 à 100  $\mu\text{m}$ ) piégées dans la calcite mettent en évidence des zones dans lesquelles le film d'eau a une épaisseur plus importante.

### 2.3.2.2 Les réseaux de cavités

L'eau présente à la base des glaciers peut s'accumuler à l'aval de certains obstacles du socle rocheux (Lliboutry, 1968). En effet la pression de glace moins importante à ces endroits permet la formation de cavités entre roche et glace. Ces cavités peuvent être reliées par de petits orifices qui permettent de former un réseau hydraulique comme présenté sur la Figure 2.12.

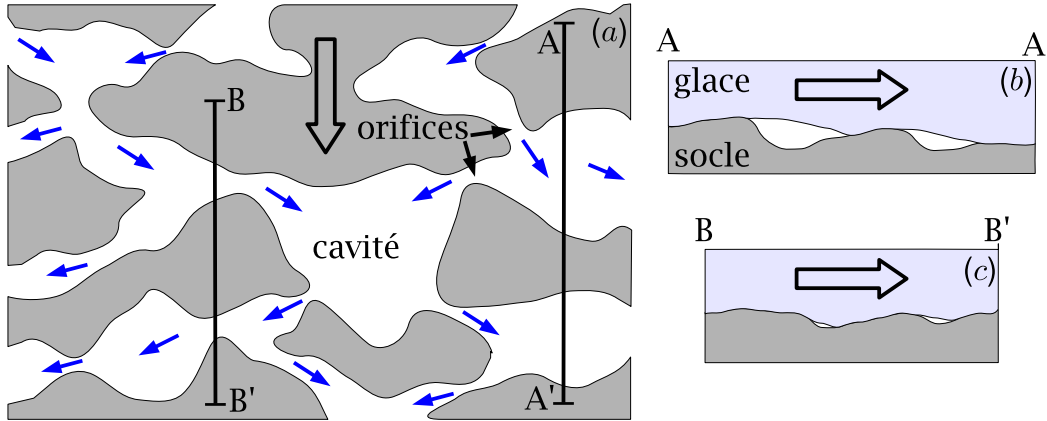


FIG. 2.12: Configuration d'un réseau hydraulique formé par des cavités interconnectées (a) et coupe à travers les cavités (b) et les orifices (c). La glace est présentée en bleu clair, le socle en gris. Les flèches bleues correspondent à la circulation d'eau et les flèches creuses noires au flux de glace. Figure adaptée d'après Kamb (1987).

Des évidences de l'existence de ce type de drainage ont été observées par Walder et Hallet (1979) et Hallet et Anderson (1980) dans différentes zones. De plus, ces systèmes de drainage pour lesquels la vitesse de déplacement de l'eau est faible présentent des temps de transfert importants mais drainent une quantité d'eau importante du fait d'un grand nombre de passages existant. Ces caractéristiques ont été mises en évidence par des expériences d'injection de traceurs durant un «surge» du Variegated glacier (Alaska) par Kamb *et al.* (1985). Lors de cet événement de crue glaciaire, la vitesse de transfert des colorants injectés dans le système de drainage ( $0.02 \text{ m s}^{-1}$ ) était compatible avec des canaux de diamètre millimétrique. Or, des canaux de cette taille ne pourraient pas évacuer la totalité du volume d'eau que l'on mesure au front du glacier. Il conclut donc à un système de cavités pour lequel la vitesse de transfert est contrôlée par les faibles vitesses de déplacement dans les cavités alors que le débit total est maintenu grâce aux vitesses élevées qui sont supposées aux orifices entre cavités.

### 2.3.2.3 Les chenaux et canaux

Plusieurs géométries ont été proposées pour des systèmes de drainage formés par un réseau de chenaux à l'interface entre le socle rocheux et la glace.

**Röthlisberger (1972)** propose des tunnels circulaires incisés dans la glace comme indiqués sur la Figure 2.13(a). Toutefois les résultats de son étude peuvent aussi s'appliquer à des chenaux



semi-circulaires dont la base serait le socle rocheux alors que la voûte serait incisée dans la glace (Figure 2.13(b)). Son étude met en jeu un équilibre entre l'élargissement des canaux dû au frottement de l'eau sur les parois et leur rétrécissement dû à la déformation de la glace. Il montre ainsi qu'un tunnel d'une taille importante présenterait une pression hydraulique plus importante qu'un tunnel de taille plus réduite. Ainsi les canaux présentant un diamètre important draineraient l'eau de canaux de plus petite taille formant ainsi des réseaux arborescents.

**Hooke *et al.* (1990)** proposent une nouvelle géométrie en se basant sur le fait que la théorie des canaux de Röthlisberger donne souvent des pressions d'eau plus faibles que celles qui sont observées. En se basant sur l'étude de Röthlisberger (1972), Hooke *et al.* donnent une nouvelle forme aux canaux qui permet de reproduire plus fidèlement les pressions observées. Pour reproduire ces pressions, ils définissent une géométrie beaucoup plus "plate" pour les chenaux constitués d'un arc de cercle interceptant le socle rocheux (Figure 2.13(c)).

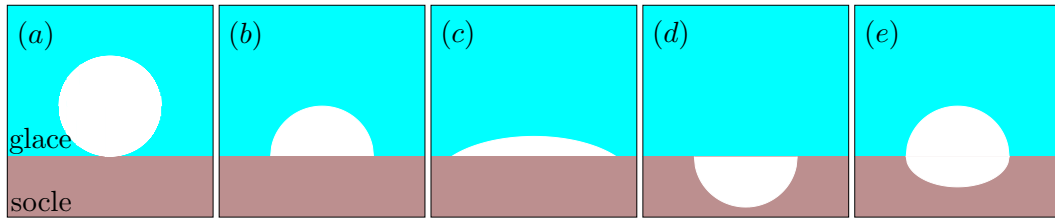


FIG. 2.13: Forme des canaux pour les différentes théories, la glace est en bleu, le socle marron et le canal en blanc : (a) et (b) canaux selon Röthlisberger (1972), (c) canaux selon Hooke *et al.* (1990), (d) canaux selon Nye (1973b) et (e) selon Walder et Fowler (1994)

**Nye (1973b)** propose quant à lui d'inciser des canaux dans le socle rocheux lui même (Figure 2.13(d)). Cette hypothèse est avancée pour expliquer la permanence des systèmes de drainage. En effet des canaux incisés dans la glace pourraient être fermés si le mouvement de la glace les amenait au contact d'un obstacle. Un canal incisé dans le socle, au contraire, ne pourra être fermé si la pression d'eau reste suffisante. De plus ce type de chenaux incisés dans le socle est observé sur des zones déglacées ce qui vient confirmer la théorie.

**Walder et Fowler (1994)** se placent dans le cas d'un socle constitué de sédiments non solidifiés. Dans ce cas, les chenaux qui se développent se mettent en place à l'interface entre glace et sédiments et sont incisés dans les deux milieux (Figure 2.13(e)).

#### 2.3.2.4 L'écoulement dans une couche de sédiments

Quand une couche de sédiments meubles est mise en évidence à la base d'un glacier, la solution la plus évidente pour drainer l'eau est la mise en place d'une couche aquifère poreuse (Fountain, 1994; Hubbard *et al.*, 1995). Toutefois les sédiments glaciaires présentent des valeurs de conductivité hydraulique assez faibles de  $5 \times 10^{-12}$  à  $1 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$  (Freeze et Cherry, 1979), exceptionnellement jusqu'à  $2 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$  (Piotrowski, 2006). Ces faibles valeurs ne permettent

pas de drainer un volume d'eau très important. Moeller *et al.* (2007) ont montré par exemple qu'une couche de sédiment seule ne pouvait drainer la totalité de l'eau produite par les glaciers du Nordfjord (Norvège) durant le Weichselien.

### 2.3.3 Le drainage sous-glaciaire, une combinaison de plusieurs systèmes

Les différents systèmes hydrologiques que l'on a défini ci-dessus peuvent être classifiés en deux grandes familles. D'une part les systèmes dits efficaces et d'autre part, les systèmes inefficaces. On trouve aussi dans la littérature les termes "arborescents" et "non arborescents" (e.g. Hubbard et Nienow, 1997) ou encore "chenalisés" et "distribués" (e.g. Raymond *et al.*, 1995). Toutes ces dénominations se rapportent à une seule caractéristique qui est la pression d'eau dans les différents systèmes.

#### 2.3.3.1 Les systèmes de drainage efficaces (SDE)

Les systèmes de drainage dit efficaces permettent d'évacuer des quantités importantes d'eau tout en gardant une pression faible à la base du glacier. Cette famille regroupe les différents types de chenaux. En effet, dans ces systèmes, la pression d'eau diminue quand la taille du canal augmente et donc quand le volume d'eau évacué est plus important. Cette relation entre taille du canal et pression d'eau explique aussi le terme "chenalisé". Plus un conduit est important, moins sa pression est grande. Il peut donc drainer l'eau des chenaux plus petits qui présentent une pression d'eau plus élevée. Le sigle SDE sera utilisé dans la suite de ce travail pour décrire ces systèmes.

#### 2.3.3.2 Les systèmes de drainage inefficaces (SDI)

On regroupe sous cette appellation, les systèmes hydrauliques de faible capacité de drainage et qui entraînent donc des pressions d'eau beaucoup plus importantes. Cette famille regroupe les films d'eau, les réseaux de cavités et l'écoulement dans une couche de sédiments. Dans ces différents systèmes, une augmentation du volume d'eau à évacuer entraînera directement une augmentation de la pression d'eau à la base du glacier. Le sigle SDI sera utilisé dans la suite de ce travail pour décrire ces systèmes.

#### 2.3.3.3 La combinaison des systèmes de drainage

Walder et Fowler (1994) ont mené une étude très complète sur la stabilité relative des différents systèmes de drainage en fonction du volume d'eau à évacuer. Ils montrent que les réseaux de drainage efficaces prennent le relais des réseaux inefficaces une fois que le volume d'eau à évacuer devient trop important pour ces derniers. La Figure 2.14 présente la synthèse de leur étude dans le cas des calottes de glace (pente faible :  $\sin\alpha \sim 0.001$ ) et des glaciers de type alpins (pente forte :  $\sin\alpha \sim 0.1$ ). Sur ces graphes, les courbes pleines représentent l'évolution d'un système de drainage en fonction du débit  $Q_c$  à évacuer. Les courbes en tireté correspondent à des systèmes qui peuvent exister mais qui seront rapidement abandonnés du fait de leur faible efficacité.

Les différences de pression entre ces différents systèmes vont donc entraîner la mise en place de flux d'eau d'un système à l'autre. Shoemaker et Leung (1987) montrent les interactions entre

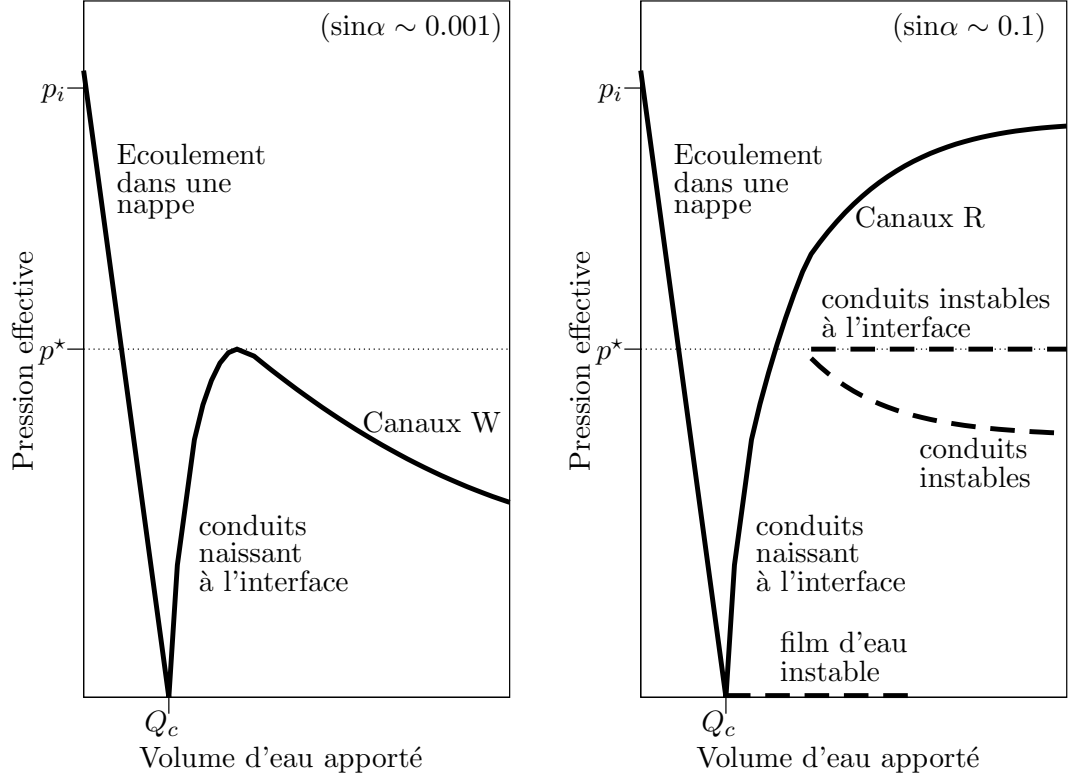


FIG. 2.14: Évolution de la pression effective en fonction du volume d'eau à évacuer. Les canaux R et W sont respectivement ceux décrits par Röthlisberger (1972) et Walder et Fowler (1994). L'interface dont on parle ici est l'interface glace socle rocheux.  $p_i$  correspond à la pression hydrostatique de la glace et  $p^*$  à la pression correspondant à un changement de régime hydraulique. Figure adaptée d'après Walder et Fowler (1994)

une couche de sédiments et un chenal en fonction de la stratification du socle. Boulton *et al.* (2007b) mesurent les charges hydrauliques proches du front du Breidamerkurjökull (Islande) et à proximité d'un canal. Ces mesures montrent bien que le canal a tendance à drainer l'eau présente dans le sédiment et donc à abaisser la charge hydraulique.

## 2.4 Synthèse sur la dynamique glaciaire

Les modèles d'écoulements glaciologiques devront donc prendre en compte les trois composantes du déplacement pour rendre compte des vitesses observées à la surface des glaciers. L'avancée des recherches pour chacune des composantes du déplacement est loin d'être la même. Il semble en effet que le problème de la déformation de la glace soit résolu depuis l'apparition de la loi de Glen (équation (2.1)). A l'inverse, la déformation des sédiments sous-glaciaires est encore un domaine méconnu qui n'a fait l'objet que de peu d'études depuis sa mise en évidence par Alley *et al.* (1986). Les recherches effectuées pour résoudre ce «nouveau» problème se confrontent à

de nouvelles barrières tant au niveau expérimental qu’au niveau de la formalisation du déplacement. Le problème du glissement basal a beaucoup évolué depuis les premières loi de glissement développées par Weertman (1957b). Les recherches se sont peu à peu axées sur des loi de frottement qui permettaient de rendre compte des nombreux phénomènes physiques à l’œuvre à la base des glaciers. Ainsi l’apparition de la pression effective dans les lois de frottement a permis d’introduire des processus physiques là où les premières loi de frottement utilisaient de simples paramétrisations. Cette nouvelle approche du glissement basal demande de mettre en place des modèles d’hydrologie sous-glaciaire dédiés au calcul de la pression effective qui donneront alors une variable d’entrée pour le calcul des vitesses basales. On présentera dans le chapitre suivant les objectifs de la modélisation glaciologique ainsi que les méthodes qui sont utilisées avant de parler plus en détail du modèle d’hydrologie développé dans le Chapitre 4.



## Chapitre 3

# Modélisation de la dynamique glaciaire

Les différentes composantes de la dynamique glaciaire ont été présentées dans la Section 2.1. Nous allons nous attacher ici à montrer l'intérêt qu'il y a à modéliser cette dynamique. Dans un deuxième temps nous expliquerons les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de l'écoulement de la glace.

### 3.1 Les objectifs de la modélisation

L'extension spatiale des glaciers est fortement liée à l'environnement dans lequel ils se développent. Ainsi on observe des formes glaciaires différentes allant des calottes polaires jusqu'aux glaciers de vallée en fonction de la latitude à laquelle se forment ces glaciers. Le climat a, de même, un impact important sur la géométrie glaciaire. Ainsi, les glaciers témoignent de l'environnement dans lequel ils se forment et l'évolution de leurs géométries sont des indices des variations climatiques. Toutefois, les relations entre le climat et la géométrie glaciaire sont beaucoup plus complexes que celles qui existent entre le bilan de masse et les variables climatiques. Ainsi, des modèles complexes devront être mis en place si l'on souhaite prévoir l'évolution de la géométrie des glaciers en fonction des changements climatiques.

#### 3.1.1 La reconstruction climatique

Les observations de bilan de masse permettent d'enregistrer de manière directe les variations du climat. Toutefois, ces observations demandent la mise en place de campagnes de terrain assez lourdes et qui doivent être répétées au moins deux fois par an. Les bilans de masse ne sont donc connus que pour un petit nombre de glaciers et durant des périodes généralement assez courtes (la plus longue série a commencé en 1946 sur le Storglaciaeren (Suède)). On peut par contre rassembler des données concernant la position du front des glaciers depuis la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle environ grâce à des témoignages, des informations cadastrales ou encore des gravures précises. De plus, l'observation de la position du front est beaucoup plus facile à mettre en place et donc applicable à un grand nombre de glaciers (plus de 700 glaciers référencés par le World Glacier Monitoring Service, Haeberli *et al.*, 2008).

Il est par contre beaucoup plus complexe, à partir de ces mesures sur la position du front

de remonter à un signal climatique. La Figure 3.1 montre, pour le glacier d’Argentière (France), la variation de la position du front ainsi que le bilan de masse cumulé qui a déjà été présenté sur la Figure 1.4. La durée relativement faible de la série de bilan de masse par rapport aux observations de front est évidente même si, dans le cas du glacier d’Argentière, l’apport de la photogrammétrie permet d’allonger la période d’observation des bilans. Dans la période récente, où les deux séries de données sont disponibles, on observe une certaine corrélation entre bilan de masse et position du front. Cette corrélation laisse penser que l’on pourrait reconstruire une série des bilans de masse passés à partir des observations effectuées sur la position du front des glaciers. Ainsi, la reconstruction de ces bilans de masse donnerait directement accès à la variable climatique. Toutefois, l’observation des deux séries de données nous montre des différences tant dans la phase que dans l’amplitude des signaux. En particulier, on observe que l’évolution de la position du front présente un retard par rapport à celle des bilans de masse. Ce retard est dû au temps de réponse nécessaire au glacier pour adapter sa géométrie au climat du moment. ce temps de retard mais aussi la différence d’amplitude entre les signaux, ne permettent pas de mettre en place des relations simples entre bilan de masse et évolution de la géométrie glaciaire.

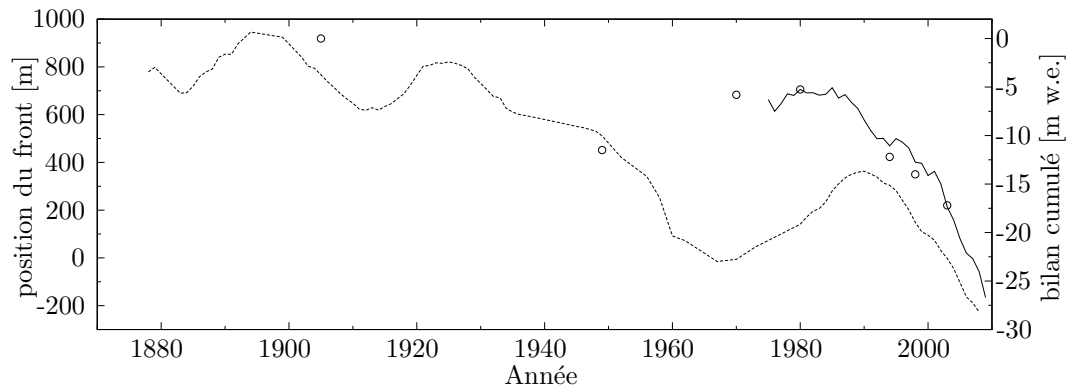


FIG. 3.1: Comparaison entre le bilan de masse cumulé (trait plein pour le bilan mesuré sur le terrain et cercles pour les bilans obtenus par photogrammétrie) et la position du front du glacier d’Argentière (tireté). La position du front du glacier est prise à partir d’un point de référence arbitraire. L’augmentation de cette distance correspond à une avancée du glacier alors que sa diminution correspond à un retrait. Données du service d’observation GLACIOCLIM (Vincent *et al.*, 2009).

La complexité de cette relation géométrie-climat s’observe bien sur les variations temporelles à petite échelle. La Figure 3.2 présente l’évolution de la position du front de différents glaciers alpins. Le regroupement de ces glaciers dans une petite zone géographique laisse penser qu’ils subissent tous le même forçage climatique et donc une relation simple entre géométrie et climat entraînerait une réponse similaire de la part de tous les glaciers. Comme on le voit sur la Figure 3.2(a), le comportement de ces glaciers est en effet similaire sur des échelles de temps importantes. Par contre, si on observe les variations de position de leur front à plus petite échelle de temps (Figure 3.2(b)) on remarque un déphasage entre les différents glaciers. Ainsi le recul du front du glacier des Bossons a été amorcé dans les années 80 alors que le front du glacier d’Argentière a continué à avancer jusqu’au début des années 90. Ces différences dans la variation de

la position des fronts sont uniquement dues à des paramètres inhérents à la dynamique glaciaire qui engendrent un temps de réponse et une amplitude propre à chaque glacier en réponse à une perturbation climatique donnée.

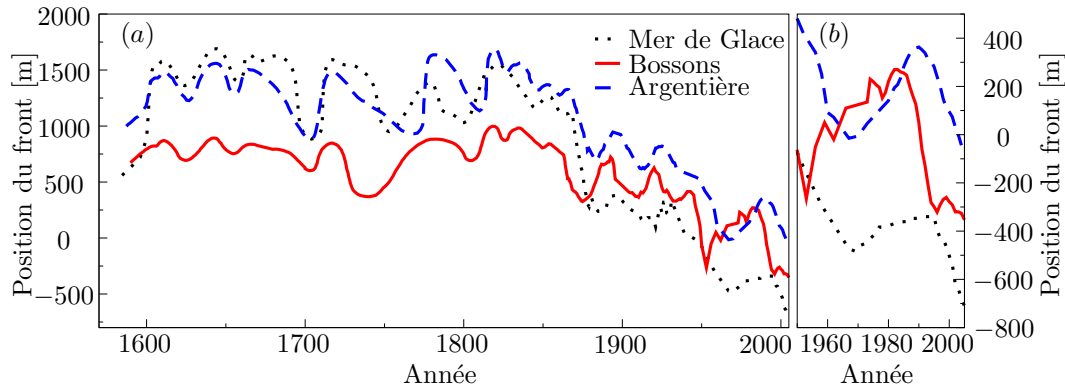


FIG. 3.2: Évolution de la position des fronts de différents glaciers alpins durant les 4 derniers siècles. Données du service d'observation GLACIOCLIM (Vincent *et al.*, 2004)

Ainsi, la réponse de la géométrie des glaciers aux variations du climat ne peut être prise en compte que par des modèles numériques qui permettent de reproduire la dynamique glaciaire. La modélisation directe de la dynamique glaciaire à partir d'un forçage climatique donné permet de vérifier les modèles numériques en les comparant aux glaciers réels. Une fois que la modélisation directe reproduit correctement la réalité, une modélisation inverse peut être envisagée pour reconstruire le bilan de masse des glaciers, puis les conditions climatiques passées à partir des variations géométriques connues.

### 3.1.2 L'évolution future des glaciers

La modélisation directe de la dynamique glaciaire a aussi des intérêts pour la communauté glaciologique. Cet exercice permet en effet de prédire la réaction des glaciers aux changements climatiques mais aussi de prendre en compte des phénomènes à plus petite échelle de temps comme ceux qui sont impliqués dans les problématiques de risque glaciaire. Dans le contexte du réchauffement climatique, deux voies principales sont explorées. La communauté glaciologique s'intéresse au devenir des glaciers de vallée d'une part et à l'évolution des calottes polaires d'autre part.

La modification des conditions climatiques entraîne une réaction des glaciers qui vont chercher à revenir au nouvel état stationnaire correspondant aux conditions climatiques du moment. La dynamique joue un rôle très important dans ces processus dont le résultat se traduit par une modification de la géométrie du glacier en fonction de l'altitude de la ligne d'équilibre et donc de la taille relative des zones d'accumulation et d'ablation. Ainsi, la dynamique glaciaire redistribue la masse de glace qui compose le glacier en vue de retrouver un état stationnaire (bilan de masse global nul) qui soit compatible avec les nouvelles conditions climatiques. On peut noter que cet état d'équilibre n'est jamais effectivement atteint car le temps de réponse des glaciers entraîne



un certain retard de ces derniers par rapport au signal climatique qui varie continuellement.

Dans le contexte actuel de réchauffement climatique, les modèles d'écoulement glaciologiques sont utilisés afin de prévoir quel sera le devenir des glaciers de montagne. Des exercices de modélisation permettent de définir la nouvelle géométrie des glaciers et donc de se faire une idée sur l'impact que pourrait avoir leur retrait sur certains aspects économiques et sociaux. Ainsi, la modélisation du glacier de St Sorlin (France) présentée sur la Figure 3.3 laisse présager de sa disparition à l'horizon 2100. Économiquement, la disparition de ce glacier n'aurait qu'un impact limité lié à la disparition de certaines activités de tourisme de montagne mais ce serait une perte inestimable pour les skieurs aoutien de Grenoble.

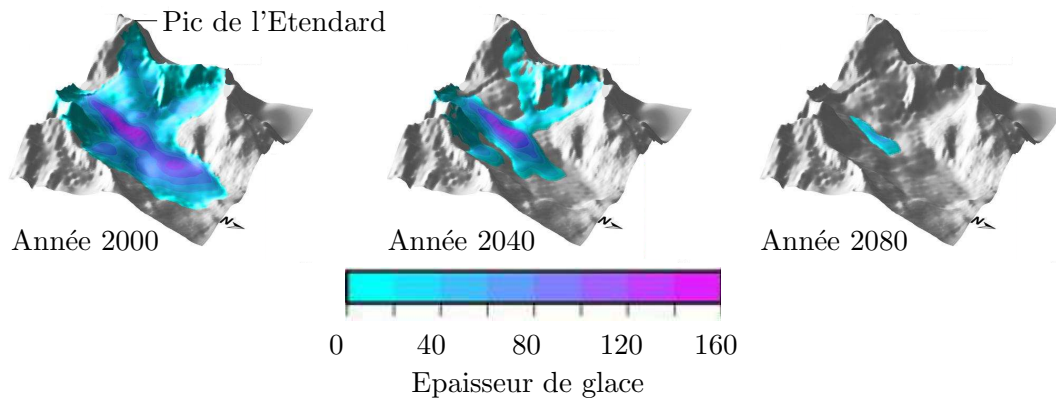


FIG. 3.3: Résultats issus de la modélisation de l'évolution de la géométrie du glacier de St Sorlin. Figure adaptée de Le Meur *et al.* (2007)

La récession d'autres glaciers peut par contre avoir un impact économique plus important. Par exemple, le retrait du glacier de la Mer de Glace oblige la compagnie E.D.F. à relocaliser ses captages d'eau sous-glaciaire nécessaires au fonctionnement de la centrale hydroélectrique des Bois (vallée de Chamonix, France). Dans cette optique, la modélisation permet de définir la géométrie future du glacier et donc d'évaluer la localisation la plus favorable et la durée de vie du nouveau captage.

Pour les calottes polaires (Antarctique et Groenland), l'enjeu de la modélisation est un peu différent. Ces calottes constituent en effet un stock d'eau qui pourrait être transféré dans les océans en cas de fonte ou de modification de leur dynamique. La totalité de l'eau contenue dans ces deux calottes représente une hausse de 70 m du niveau des mers moyen (dont 7 m environ pour le Groenland, Alley *et al.*, 2005). Ainsi, la modélisation de la dynamique des calottes polaires s'intéresse au volume de glace qui pourra être transféré de la calotte vers l'océan en fonction de divers scénarios climatiques. L'estimation de ces volumes permet alors de prévoir la hausse future du niveau des mers due à la modification de géométrie des calottes polaires.

L'étendue spatiale des calottes polaires en fait des objets géophysiques complexes. Leur modélisation nécessite en effet de prendre en compte différents mécanismes qui agissent à des échelles de temps et d'espace spécifiques. Ainsi, les vitesses de surface qui sont observées au centre des calottes sont principalement dues à la déformation de la glace. Sur le bord des calottes, par

contre, il se forme des fleuves de glace ou glaciers émissaires dont la dynamique est fortement liée aux processus basaux. Les différents modes de déplacement des glaciers (déformation, glissement basal et déformation possible de l'éventuelle couche de sédiments) ont été présentés dans la section 2.1. Nous présenterons dans la suite de ce chapitre les méthodes qui sont utilisées pour modéliser les différentes composantes de la dynamique glaciaire.

La Figure 3.4 présente les différentes manières dont on peut envisager la modélisation de la dynamique glaciaire. La méthode directe (flèches évidées en haut) permet de reconstruire des géométries glaciaires passées ou futures à partir d'observations ou de scénarios climatiques. Ces reconstructions mettent aussi en jeu des modèles de bilan d'énergie qui permettent de calculer le bilan de masse à partir des variables climatiques. La méthode inverse (flèches pleines en bas), plus complexe à mettre en œuvre, permet, à partir d'une géométrie glaciaire donnée, de recalculer les bilans de masse et ensuite de reconstruire des scénarios climatiques passés.

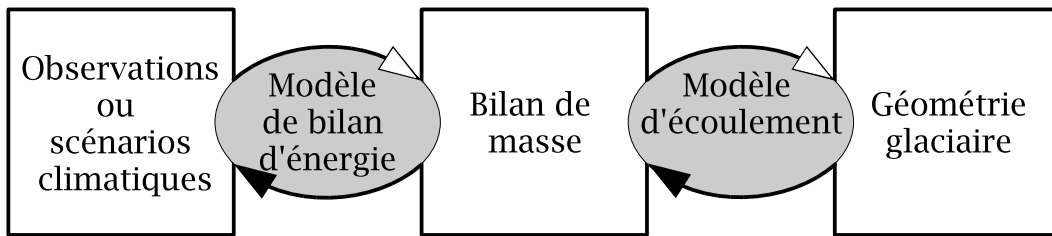


FIG. 3.4: Schéma présentant les différentes étapes nécessaires à la modélisation de la géométrie glaciaire. Les carrés représentent les entrées/sorties et les ellipses les modèles. La modélisation directe est indiquée par les flèches évidées et la modélisation inverse par les flèches pleines.

## 3.2 Des approximations adaptées aux problèmes à traiter

La dynamique de la glace est régie par un terme de déformation et un terme de déplacement basal. Les lois de frottement qui permettent de calculer le glissement à la base du glacier ayant été abordées dans la Section 2.2, nous nous intéresserons dans cette partie à décrire les modèles utilisés pour calculer le terme de déplacement dû à la déformation de la glace. Dans les modèles d'écoulement glaciologiques, cette déformation est prise en compte par l'intermédiaire du système de Stokes constitué par une équation d'incompressibilité (2.6) et une équation de conservation du moment (2.7). Le glissement basal est, quant à lui, généralement défini par une relation liant la contrainte basale  $\tau_b$  à la vitesse de glissement  $u_b$  et appliqué comme une condition limite à la base du glacier.

On présentera dans ce Chapitre les différentes méthodes permettant la résolution des équations de Stokes et leur domaine d'application. Ces différents modes de traitement seront introduits en commençant par les modèles à grande échelle pour finir par les modèles traitant de problèmes plus locaux.

### 3.2.1 Approximation de la couche mince

La modélisation d'une calotte polaire telle que la calotte Antarctique nécessite d'avoir des modèles capables d'effectuer des simulations d'une durée importante tout en gardant des temps de calcul raisonnables. En effet, ces exercices de modélisation portent sur des domaines étendus (15 millions de  $\text{km}^2$  pour l'Antarctique) et demandent de mettre en place des simulations longues (quelques centaines de milliers d'années) pour observer des variations de géométrie qui ne se manifestent de manière significative qu'à partir de ces échelles de temps.

Les modèles de type «couche mince» sont les premiers à apparaître à la fin des années 70 (Mahaffy, 1976; Jenssen, 1977; Oerlemans, 1982). Ces trois modèles ont été développés séparément mais utilisent le même type d'approximation qui sera formalisé plus tard sous le nom «approximation de la couche mince» (ou Shallow Ice Approximation, d'où le sigle SIA qui sera utilisé par la suite) par Hutter (1983) et Morland (1984). Les modèles de type SIA se basent sur une particularité géométrique des calottes polaires. En effet, ces dernières présentent une épaisseur très faible par rapport à la longueur d'une ligne de courant. La Figure 3.5 présente une coupe effectuée à travers le continent Antarctique qui montre bien ce rapport d'aspect entre épaisseur de glace et longueur d'une ligne d'écoulement.

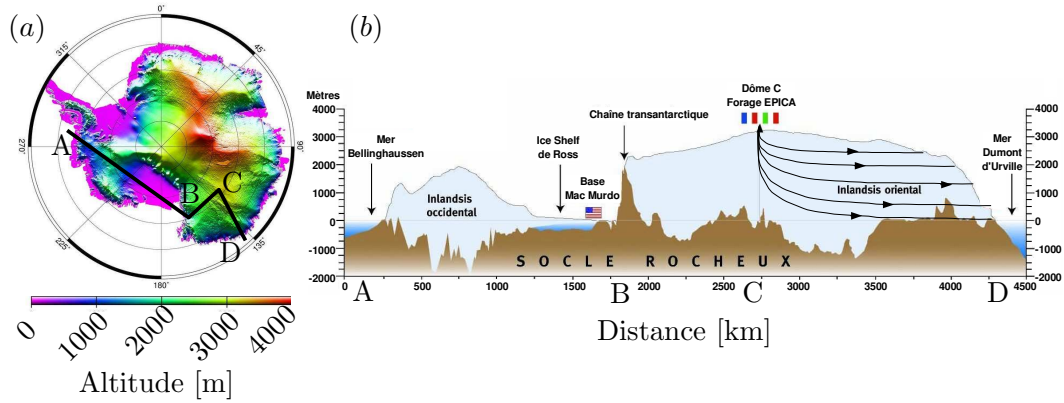


FIG. 3.5: Topographie de l'Antarctique obtenue grâce au satellite ERS (a), et coupe effectuée à travers la calotte (b). Le tracé de la coupe est indiqué sur la figure (a). On remarquera l'exagération verticale introduite dans la coupe (environ 200) et la forme des lignes de courant tracées entre Dôme C et Dumont d'Urville. Images LEGOS (a) et F. Remy (b)

La mise en place de la SIA revient à «adimensionnaliser» les équations de Stokes (2.6) et (2.7) présentées dans la Section 2.1.1 avant de les développer en séries de perturbation. On introduit pour cela dans les équations le rapport d'aspect entre épaisseur et distance horizontale caractéristique parcourue par la glace. Cette méthode implique aussi que l'on considère que le rapport entre les vitesses horizontales et verticales soit le même que le rapport d'aspect géométrique (vitesses verticales très faibles par rapport aux vitesses horizontales) ce qui introduit des limitations dans son usage. Ces équations adimensionnalisées sont alors exprimées sous la forme d'une perturbation développée en puissances du rapport d'aspect. Le développement peut alors être mené à différents ordres (suivant le plus haut degré du rapport d'aspect) qui vont peu à peu

rajouter de la complexité dans les équations. Lorsque l'on parle de modèle de type SIA, l'ordre 0 est généralement sous-entendu.

L'avantage de ce traitement SIA à l'ordre 0 est d'aboutir à des équations qui peuvent être calculées analytiquement (si l'on considère de la glace isotherme) pour les vitesses de déplacement de la glace. Les modèles basés sur ces méthodes sont alors capables de résoudre des problèmes présentant des extensions géographiques et temporelles importantes en conservant des durées de simulation raisonnables.

Ces modèles SIA sont par contre rapidement mis en défaut du fait des approximations qui sont à la base de leur développement mathématique. On citera trois limitations principales qui restreignent l'utilisation de ces approches :

- (i) la première est directement liée au choix du rapport d'aspect. En effet, il n'est pas acceptable d'un point de vue mathématique d'appliquer le développement en série de perturbation pour des rapports d'aspect dont la valeur est du même ordre de grandeur que 1. Ainsi cette méthode est tout à fait adaptée aux calottes polaires pour lesquelles le rapport d'aspect est faible ( $1 \times 10^{-3}$  pour l'Antarctique,  $5 \times 10^{-3}$  pour le Groenland si on prend les valeurs les plus favorables) mais ne peut être appliquée sur des appareils glaciaires plus modestes de type glacier de vallée pour lesquels le rapport d'aspect est beaucoup plus important (localement de l'ordre de 1 pour le glacier d'Argentières).
- (ii) la deuxième limitation est due au fait que l'on suppose que le champ de vitesse a la même forme que la géométrie ce qui est généralement bien vérifié sur les calottes polaires sauf en quelques endroits. En effet, à l'aplomb des dômes la glace s'enfonce verticalement avec une composante horizontale très faible comme on le voit sur la Figure 3.5. Ainsi, à petite échelle, les modèles de type SIA donneront des résultats erronés. Cette limitation n'est pas pénalisante étant donné que le but de ces modèles est d'effectuer des simulations à grande échelle mais elle ne permet pas d'effectuer d'autres tâches telles que la datation de forages pour lesquelles cette composante verticale de la vitesse prend toute son importance.
- (iii) la dernière limitation dont on traitera ici concerne la résolution de ces modèles. En effet, pour couvrir des surfaces importantes et pour conserver un rapport d'aspect localement faible, les mailles de ces modèles ont une résolution qui est de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres. Ainsi ces modèles ne peuvent pas rendre compte de phénomènes à petite échelle comme la dynamique propre aux glaciers émissaires qui drainent la majorité de la glace de l'Antarctique (Figure 3.6).

Basé sur cette approximation, de nombreux modèles destinés à la modélisation des calottes polaires ont vu le jour (e.g. Letréguilly *et al.*, 1991; Ritz *et al.*, 1996; Greve, 1997). Ces modèles ont tout d'abord été utilisés sur la calotte Groenlandaise pour laquelle les glaciers émissaires ne forment pas de plate-formes de glace flottante (ice-shelf) contrairement aux glaciers Antarctiques (Zones violettes sur la Figure 3.5(a)). En effet, ces zones flottantes ont un rôle majeur sur la dynamique des glaciers émissaires (e.g. Gagliardini *et al.*, 2010) et demandent un traitement particulier qui sera développé dans la Section 3.2.2.

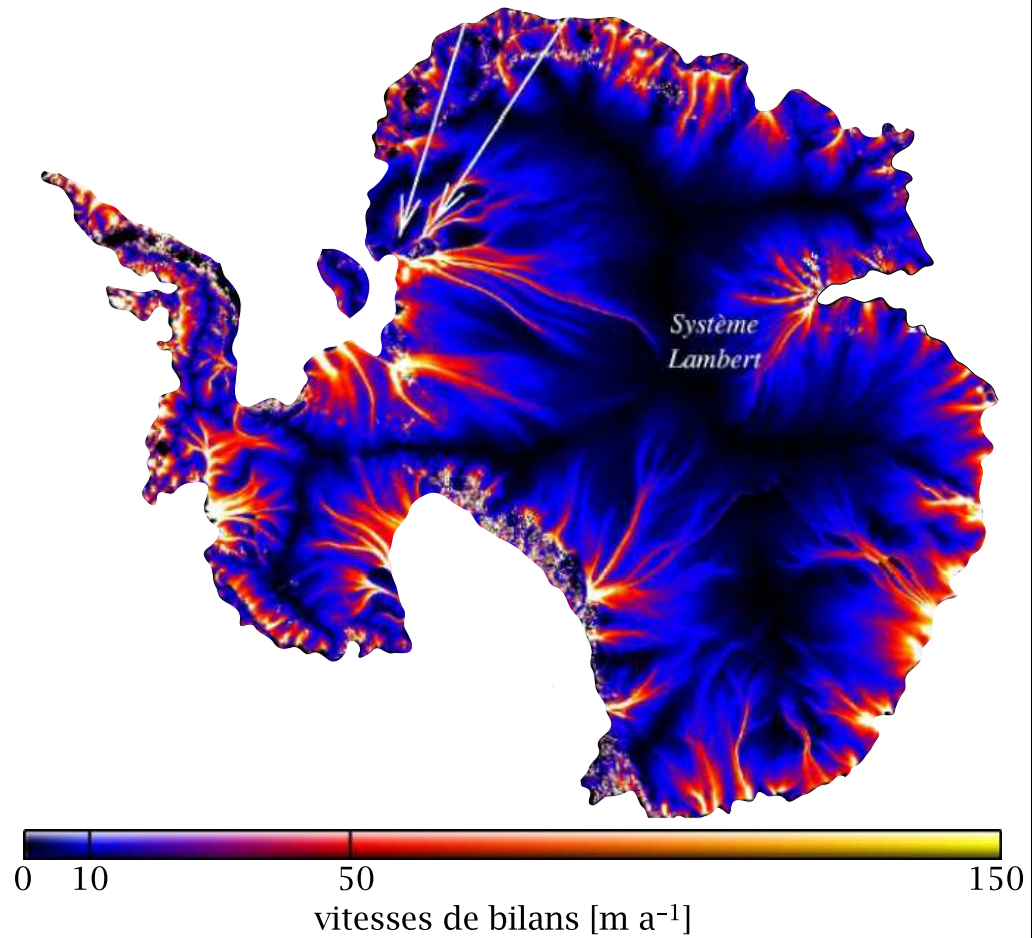


FIG. 3.6: Carte des vitesses de bilan de la calotte Antarctique. Ces vitesses sont calculées à partir du bilan de masse en surface, de la topographie actuelle, de l'épaisseur de glace et d'une hypothèse de stationnarité de la géométrie. On voit bien sur cette carte que la glace est drainée sur les bords de la calottes par quelques glaciers émissaires à écoulement rapide. Figure issue de Rémy *et al.* (2001).

### 3.2.2 Modélisation des plates-formes flottantes

Sur les bords des calottes polaires, les glaciers émissaires finissent dans la mer. On observe alors deux cas de figure. Lorsque les glaciers se jettent dans une baie assez confinée, une plate-forme de glace flottante (on utilisera le terme «ice-shelf» par la suite) se forme comme c'est le cas en Antarctique pour le Ross ice-shelf et le Ronne-Filchner ice-shelf par exemple. Si la baie est trop ouverte, l'ice-shelf ne pourra se maintenir et le glacier formera un front s'avancant plus ou moins sur la mer et à partir duquel des icebergs seront régulièrement vêlés.

Ces ice-shelves présentent un comportement mécanique très différent de celui de la glace posée. Ces différences sont dues aux conditions aux limites qui s'appliquent. Ainsi, à la base de

l'ice-shelf, le contact entre l'eau et la glace se fait sans qu'il n'y ait de contrainte qui s'oppose au glissement. De plus, à l'extrémité de l'ice-shelf, la différence de densité entre la glace et l'eau de mer entraîne la mise en place d'une force de traction au front comme présentée sur la Figure 3.7. C'est la combinaison de cette force et de l'absence de contraintes basales qui est à l'origine des vitesses de déplacement rapides des ice-shelves (quelques kilomètres par an).

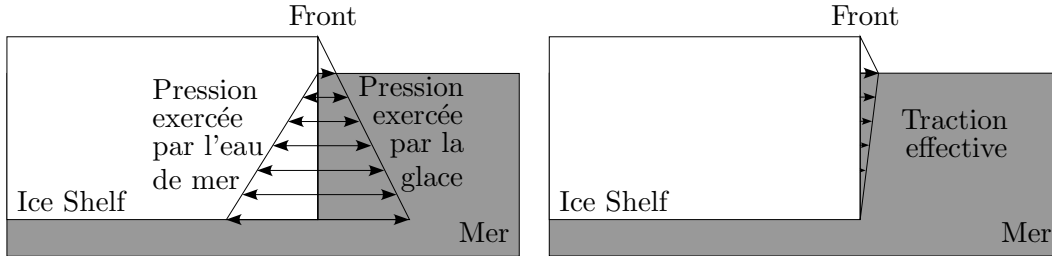


FIG. 3.7: Schéma représentant les forces qui s'appliquent à l'extrémité de l'ice-shelf. Figure d'après Rommelaere (1997)

Les premiers développements de modèles concernant les ice-shelves ont été faits par Weertman (1957a). Pour modéliser cet écoulement, il s'appuie sur le fait que le glissement à la base est parfait ce qui entraîne la mise en place d'un champ de vitesses constant sur toute l'épaisseur de la glace. En effet, on est passé ici d'un régime de déformation de la glace par cisaillement horizontal (pour la glace en contact avec le socle) à un régime d'amincissement vertical sous l'effet de contraintes normales pour la glace des ice-shelves (Figure 3.8).

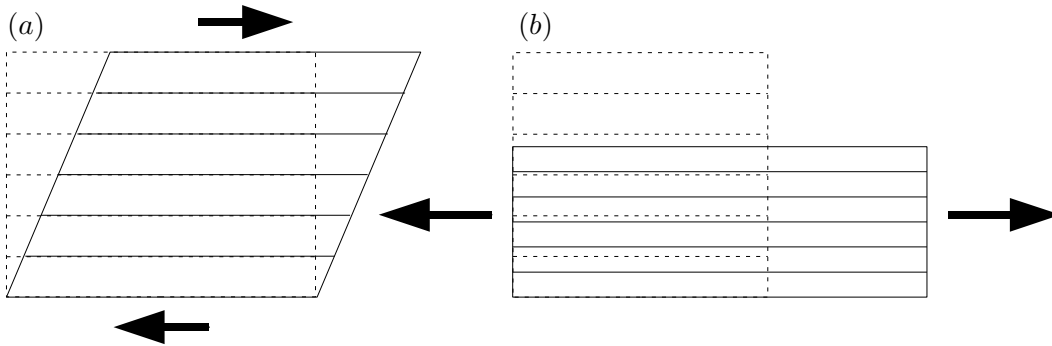


FIG. 3.8: Schéma représentant la différence entre les régimes de déformation à l'œuvre dans la glace posée (a) et dans la glace flottante (b). L'état initial est tracé en pointillé et l'état final en trait plein, les flèches représentent le régime de contrainte.

L'approximation utilisée par Weertman (1957a) et généralisée par MacAyeal (1989) a été validée du point de vue mathématique par Rommelaere (1997). Restait alors le problème consistant à introduire cette nouvelle équation dans les modèles existants qui traitaient déjà de la glace posée. Différentes méthodes ont alors été mises en place pour permettre de traiter dans le même modèle la glace posée et flottante et ainsi modéliser la totalité de la calotte Antarctique.

La combinaison des modèles utilisant l'approximation de la couche mince et des modèles d'ice-shelf permet alors de modéliser entièrement les calottes polaires à une échelle de temps compatible avec les périodes de glaciation s'étalant sur plusieurs dizaines de milliers d'années. Toutefois, l'introduction de deux équations différentes pour traiter la glace flottante et posée crée une discontinuité dans ces modèles qui n'existe pas dans la réalité. Ainsi, la zone de transition entre glace posée et glace flottante (généralement appelée zone ou ligne d'échouage) est assez mal représentée par ces modèles du fait du changement d'équations et des différences importantes dans les conditions aux limites qui sont appliquées. D'autres modèles, introduisant des approximations moins fortes ont donc été développés et sont présentés dans la suite.

### 3.2.3 Modèles d'ordres supérieurs

Ces modèles d'ordres supérieurs ne sont pas, comme on pourrait le penser, des modèles qui utilisent l'approximation de la couche mince à un ordre supérieur à zéro. En effet le développement à l'ordre 1 de la SIA n'a pas beaucoup d'intérêt car il n'apporte que peu de précision supplémentaire. Mangeney et Califano (1998) ont par contre montré que l'ordre 2 donnait des résultats intéressants pour la modélisation de la glace isotrope. Les modèles d'ordres supérieurs dont on parle ici sont basés sur la SIA à l'ordre 0 à laquelle des termes *ad hoc* sont ajoutés pour prendre en compte les contraintes longitudinales.

Hindmarsh (2004) a effectué un classement de ces différents modèles en fonction de leurs caractéristiques principales. Les différentes méthodes qu'il décrit se distinguent par la façon qu'elles ont d'approximer les contraintes longitudinales. Sur les sept modèles présentés par Hindmarsh (2004), seuls deux permettent d'améliorer significativement les résultats par rapport à ceux issus de l'approximation de la couche mince. Certains des schémas présentés par Hindmarsh (2004) présentent des instabilités quand le rapport d'aspect entre épaisseur de glace et longueur de la ligne d'écoulement devient trop grand. Toutefois, d'autres développements plus robustes permettent de modéliser des glaciers de vallées. Ainsi, Hubbard *et al.* (1998) présentent une application du modèle de Blatter (1995) sur le glacier d'Arolla (Suisse). On peut aussi citer le modèle de Pattyn (2003) qui permet de traiter des problèmes aux différentes échelles de grandeur que l'on connaît en glaciologie (du glacier de vallée à la calotte polaire).

Ces modèles d'ordres supérieurs partagent donc les avantages des modèles SIA et des modèles full-Stokes présentés ensuite. Ainsi ils permettent, dans certains cas, d'améliorer significativement les résultats issus de l'approximation de la couche mince tout en gardant des temps de calcul raisonnables (e.g. Schäfer, 2007). Toutefois, ces modèles ne sont pas aussi précis et rigoureux que les modèles full-Stokes dans le traitement des équations de la mécanique.

### 3.2.4 Modèles full-Stokes

Les premiers modèles full-Stokes datent des années 80. Leur développement coïncide avec l'amélioration des performances informatiques qui permet de résoudre de manière complète le système des équations de Stokes. Ces modèles sont donc basés uniquement sur les équations de Stokes qu'ils résolvent de manière complète et sans approximation.

Ces modèles peuvent traiter de manière précise tous les problèmes d'écoulements glaciaires. La contrepartie à cette résolution exacte est le temps de calcul nécessaire à la résolution. De

plus, pour bien rendre compte des phénomènes à petite échelle et donc valoriser la méthode de traitement, le maillage utilisé doit être assez fin. Des données de topographie précises et à fine résolution sont donc nécessaires à la mise en place de ces modèles. Nous présenterons plus en détail dans la section suivante le modèle Elmer/Ice que nous utiliserons dans la suite de ce travail pour la résolution des problèmes de dynamique auxquels nous sommes confrontés.

### 3.3 Présentation d'un modèle «Full Stokes» adapté à la dynamique glaciaire

On présentera tout d'abord le principe de la méthode des éléments finis. Puis, la méthode de résolution des équations de Stokes qui décrivent la mécanique de la glace sera présentée avant d'aborder les conditions qui seront appliquées aux limites du modèle.

#### 3.3.1 Présentation de la méthode des éléments finis

Elmer/Ice est basé, pour la résolution des équations, sur une méthode de discrétisation aux éléments finis. Cette méthode revient à chercher une solution approchée à une équation aux dérivées partielles sur un maillage donné. Ainsi la méthode donne une solution approchée du problème sur une géométrie approchée. Les valeurs de la solution approchée seront définies aux noeuds du maillage et en prenant en compte uniquement les noeuds du même élément. Ainsi cette méthode autorise l'utilisation de maillages irréguliers qui permettent d'approcher au mieux la géométrie du problème et d'introduire des raffinements sur les principales zones d'intérêt. Les deux points clés de la méthode sont donc la définition de la formulation approchée de l'équation (ou formulation variationnelle) et le choix des fonctions de base qui permettront de calculer la valeur de cette solution approchée sur les noeuds de la grille. On présentera dans la suite les généralités sur ces deux points. Une description plus précise de la méthode est présentée dans l'Annexe A

##### 3.3.1.1 La formulation faible d'un problème

Les problèmes de physique se réduisent généralement à une équation de conservation du moment et une équation d'état propre au matériau considéré. On synthétise généralement ces deux équations en une unique équation aux dérivées partielles (EDP). C'est sur cette EDP que l'on va travailler pour obtenir la formulation faible ou variationnelle du problème. On utilise généralement pour cela la méthode de Galerkin qui permet de décrire de façon simplifiée cette EDP par l'introduction d'un champ solution virtuel cinématiquement admissible. On applique alors finalement le principe du travail virtuel en cherchant un champ solution qui minimise l'énergie du système définie comme la somme des travaux des forces extérieures et intérieures. La formulation faible ainsi obtenue est alors discrétisée sur les différents éléments du maillage qui définissent l'objet à modéliser. Le champ des solutions approchées est alors décomposé en un nombre de termes égal au nombre d'éléments qui composent le système. Ce sont ces différents termes qui seront alors réécrits en fonction des fonctions de base du système pour résoudre le problème.



### 3.3.1.2 Les fonctions de base

Les fonctions de base sont directement liées à la discrétisation du domaine. Ainsi le domaine d'étude est divisé en un nombre d'éléments donnés. Les coins de chaque éléments correspondent aux nœuds du modèle sur lesquels la solution approchée de l'EDP sera calculée. Chacun des nœuds possède alors une fonction de base qui lui est propre. Ces fonctions sont généralement définies de sorte qu'elles valent 1 au nœud auquel elles sont rattachées et zéro sur tous les autres nœuds. Ainsi la somme de toute les fonctions de base sur le modèle permet de décrire complètement le modèle discrétisé et l'application d'une seule fonction donne la valeur approchée de l'EDP au nœud auquel elle se rapporte. L'application de ces fonctions de base à l'EDP discrétisé permet alors de bâtir un système matriciel qui pourra être résolu numériquement.

### 3.3.2 Résolution des équations de Stokes

La déformation de la glace est traitée comme l'écoulement d'un fluide incompressible sous l'effet de la gravité. La résolution de ce problème d'écoulement se fait par l'intermédiaire du système de Stokes composé d'une équation d'incompressibilité et de l'équation de conservation du moment (équations (2.6) et (2.7)). La fonctionnelle à minimiser est alors écrite comme :

$$J(u_i, p) = \int_{\Omega} \phi + p\dot{\varepsilon}_{ii} - \rho_i g u_i d\Omega, \quad (3.1)$$

où  $\phi$ , le potentiel de dissipation est lié au tenseur des contraintes déviatoires par la relation :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (3.2)$$

Une variation  $\delta J$  de  $J(u_i, p)$  est alors définie en fonction de variations arbitraires  $\delta u_i$  et  $\delta p$  de  $u_i$  et  $p$ .

$$\delta J = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} + p \delta \dot{\varepsilon}_{ii} + \delta p \dot{\varepsilon}_{ii} - \rho_i g \delta u_i d\Omega. \quad (3.3)$$

Étant donnée la symétrie du tenseur des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ), la définition des vitesses de déformation (équation (2.4)) et en utilisant la définition des contraintes de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}$ ) l'équation (3.3) se simplifie sous la forme :

$$\delta J = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} + \delta p \dot{\varepsilon}_{ii} - \rho_i g \delta u_i d\Omega. \quad (3.4)$$

L'intégration par partie du terme  $\sigma_{ij} \delta u_{i,j}$  par le théorème de Green donne alors :

$$\delta J = \int_{\Omega} [-\delta u_i (\sigma_{ij,j} + \rho_i g) \delta p \dot{\varepsilon}_{ii}] d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma. \quad (3.5)$$

La résolution du système de Stokes revient donc à chercher pour quelle valeur de la variation arbitraire  $\delta u_i$  de  $u_i$  et de celle de la pression  $\delta p$  la fonction  $\delta J$  s'annule traduisant un état d'énergie minimale pour le système.

### 3.3.3 Résolution de la surface libre

La surface supérieure d'un glacier n'est soumise qu'à la pression atmosphérique. Cette pression peut être négligée devant les autres forces qui sont en jeu dans la déformation de la glace et on considère donc généralement cette surface comme libre.

La gestion de cette surface libre se fait par l'introduction d'une fonction implicite de l'espace et du temps  $F(x, y, z, t)$ . Cette fonction est définie par une altitude initiale  $z_0$  et l'altitude explicite  $z_t$  de la surface libre dépendant du temps et de l'espace :

$$F(x, y, z, t) = z_0 - z_t(x, y, t). \quad (3.6)$$

La conservation de la masse implique alors que la variation de la position de  $F$  soit compatible avec sa vitesse de déplacement  $\mathbf{u}_f$  :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u}_f \text{grad } F = 0. \quad (3.7)$$

La différence entre la vitesse de déplacement de la surface libre  $\mathbf{u}_f$  et celle de la glace  $\mathbf{u}$  définit alors un flux entrant ou sortant :

$$b = (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}). \quad (3.8)$$

En injectant l'équation (3.8) dans l'équation (3.7) on a alors :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + b \text{grad } F + \mathbf{u} \text{grad } F = 0. \quad (3.9)$$

On remplace finalement  $F$  par son expression dans l'équation (3.9) :

$$\frac{\partial z_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial z_t}{\partial x} + u_y \frac{\partial z_t}{\partial y} - u_z = b(x, y, t), \quad (3.10)$$

ou les  $u_i$  ( $i = x, y, z$ ) sont les composantes du vecteur vitesse sur la surface dans les trois directions de l'espace. La formulation variationnelle de cette équation est alors mise en place en introduisant la fonction test  $\phi$  tel que :

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial z_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial z_t}{\partial x} + u_y \frac{\partial z_t}{\partial y} - u_z \right] \phi d\Omega = \int_{\Omega} b(x, y, t) \phi d\Omega, \quad (3.11)$$

où la distribution du bilan de masse  $b(x, y, t)$  est donnée en mètres équivalents glace pour éviter les problèmes de conversion. Ce traitement rajoute une non-linéarité dans le modèle mais il permet de traiter de problèmes transitoires. C'est aussi grâce à cette approche que l'on peut introduire le bilan de masse à la surface du glacier.

### 3.3.4 Conditions aux limites des équations de Stokes

Les conditions aux limites sont un paramètre important de tout système physique. En effet, c'est en général ces conditions qui permettent de garantir l'unicité de la solution obtenue. On présentera dans cette section les différentes conditions qui peuvent être appliquées sur chacune des frontières du modèle.

### 3.3.4.1 Conditions latérales

On peut différencier pour les glaciers deux types principaux de conditions latérales. La première, la plus simple à traiter, concerne les zones pour lesquelles l'épaisseur de glace au bord du maillage est très faible. On observe ce cas lorsque l'on modélise la totalité d'un glacier. En effet, sur les bords et au front du glacier on ne peut pas fixer une épaisseur de glace nulle sur le dernier élément du maillage. Ainsi on obtient sur les bords du maillage des portions de glaces verticales. Ces limites, tout comme la surface supérieure ne sont en contact qu'avec l'air et sont donc traitées comme des surfaces libres. Le deuxième type de condition aux limites est mis en place lorsque l'on modélise seulement une portion d'un objet glaciaire de grande taille. On prescrit alors les vitesses sur ces limites. Le cas le plus courant est celui pour lequel la limite latérale du domaine modélisé correspond aux limites du bassin versant. Ainsi il n'y a pas de flux de glace qui passe au travers de ces limites ce qui se traduit par une vitesse normale à la frontière nulle.

### 3.3.4.2 Condition basale

La condition limite à la base du glacier va nous permettre de lier le modèle d'écoulement que l'on vient de décrire au modèle d'hydrologie qui est présenté dans le chapitre suivant. On utilise pour cela la loi de frottement (2.20) présentée dans la Section 2.2.3.

Cette loi de frottement constitue une condition aux limites de type Robin. On peut voir la condition de Robin comme une combinaison d'une condition de Dirichlet, qui applique à un point donné la valeur de la variable, et une condition de Neumann qui, là où elle s'applique, impose la dérivée de la variable.

Ici, on observe une relation non-linéaire entre la contrainte basale tangentielle  $\tau_{bi}$  (que l'on pourrait écrire en fonction des dérivées des vitesses basales grâce à la loi de Glen (2.1)) et les vitesses basales. Cette relation s'écrit en fonction de trois paramètres ( $C$ ,  $A_s$  et  $n$ ) et de la pression effective. Ainsi, le but de ce travail réside dans le développement d'un modèle d'hydrologie qui permette le calcul de la pression effective en vue de mettre en œuvre cette loi de frottement. On disposera alors d'une paramétrisation physique de la loi de frottement qui permettra de faire évoluer la vitesse basale d'un glacier en fonction de la pression d'eau à sa base.

## Chapitre 4

# Un modèle d'hydrologie dédié au glissement basal

### 4.1 La modélisation de l'hydrologie glaciaire

La présence d'eau à la surface des glaciers est une évidence facilement observable et les volumes d'eau libérés par les glaciers sont importants au point de vue économique (irrigation, eau potable, production d'énergie). L'hydrologie glaciaire, qui s'intéresse au devenir de cette eau, est ainsi rapidement devenue une branche importante de la glaciologie. L'acheminement de l'eau à travers le glacier entre sa disparition de la surface par l'intermédiaire de moulins et de crevasses et sa résurgence au front est une question importante de l'hydrologie glaciaire. Les différents modes de drainage observés à la surface des glaciers (supra-glaciaire), dans la glace (intra-glaciaire) et à la base du glacier (sous-glaciaire) doivent donc être caractérisés précisément en vue de retracer le parcours de l'eau entre son lieu de production et le front du glacier.

#### 4.1.1 L'hydrologie glaciaire, une modélisation à deux facettes

Le problème initial que cherche à résoudre la modélisation de l'hydrologie glaciaire est de connaître, en fonction des sources d'eau et de leur répartition dans le temps, les débits que l'on peut attendre au front d'un glacier. Les observations et les différents types de modèles apportant des réponses à ce problème seront ensuite présentés comme «à vocation hydrologique». L'apparition de lois de frottement, liant la vitesse de glissement basal des glaciers à la pression effective (et donc à la pression d'eau) dans les années 1970, soulève une nouvelle problématique pour la modélisation de l'hydrologie glaciaire. En effet, les modèles qui jusque là n'utilisaient la pression d'eau que pour connaître sa vitesse de propagation doivent être adaptés pour faire de cette pression leur variable d'intérêt. Ces nouveaux modèles d'hydrologie ainsi que les observations qui leurs sont liées seront dits par la suite «à vocation glaciologique».

Ces deux objectifs pourraient être remplis par un modèle unique mais ce dernier devrait alors contenir tous les processus actifs alors que si les deux objectifs restent découplés, certains de ces processus peuvent être négligés en fonction du but que l'on recherche. En effet, un modèle à vocation hydrologique devra rendre compte précisément du débit observé à l'exutoire tant en

terme de volume que de durée des événements. Dans ce but, le modèle devra prendre en compte les vitesses de déplacement de l'eau dans les différentes portions du système hydrologique (supra-glaciaire, intra-glaciaire et sous-glaciaire). Dans le cas d'un modèle à vocation glaciologique, l'accent sera plus mis sur le calcul de la pression de l'eau à la base du glacier. Les systèmes de drainage supra et intra-glaciaires seront donc moins importants de ce point de vue. Par contre, dans ce deuxième cas, on ne peut plus faire l'approximation d'une pression effective nulle qui était admissible dans le premier cas.

### 4.1.2 État de l'art

L'importance de l'hydrologie glaciaire, tant en terme économique (production d'énergie, irrigation, eau potable) qu'en terme de risque naturel (crue sous-glaciaire, vidange de lacs ou de poches d'eau) ainsi que la découverte tardive du lien entre pression hydraulique et dynamique glaciaire a longtemps favorisé la recherche sur les modèles à vocation hydrologique par rapport à ceux dont la vocation est glaciologique. Dans la suite de cette section on présentera donc l'état de l'art au niveau des observations avant de s'intéresser plus précisément aux modèles existants. On ne reviendra pas dans cette section sur les études qui ont été menées pour décrire les différents types de drainages et qui ont déjà été présentées dans la Section 2.3.2.

#### 4.1.2.1 Les observations hydrologiques en glaciologie

La base des observations nécessaires aux modèles hydrologiques sont les observations météorologiques. Ainsi, la mesure des radiations solaires, de la température et de l'humidité relative permettent de calculer un taux de fonte à la surface du glacier (e.g. Arnold *et al.*, 1996). La mesure des précipitations liquides permet de compléter ces observations et d'obtenir la totalité des volumes d'eau injectés à la surface du glacier. A l'autre extrémité de la chaîne, les données de contrôle sont souvent fournies par des mesures de débit du torrent émissaire prenant naissance au front du glacier (e.g. Arnold *et al.*, 1998; Fowler, 1999). Entre ces données d'entrées et les volumes mesurés au front des glaciers, d'autres méthodes peuvent être utilisées pour valider les résultats des modèles hydrologiques.

La méthode la plus couramment utilisée est celle du suivi de marqueurs. Cette technique consiste à injecter dans des moulins ou des crevasses connectés au système hydraulique sous glaciaire des solutions dont on pourra mesurer les concentrations à l'aval du point d'injection (e.g. Fountain, 1993; Sharp *et al.*, 1993). En glaciologie, les solutions les plus couramment utilisées sont des saumures ou des solutions fluorescentes. Ces injections contrôlées de traceurs permettent de déduire différentes caractéristiques du système de drainage en fonction du temps de transit du marqueur mais aussi de la quantité de traceur récupéré ou de l'évolution au cours du temps des concentrations récupérées.

- (i) Les vitesses de transit des marqueurs permettent de caractériser les systèmes de drainage. Ainsi des vitesses de drainage supérieures à  $0.2 \text{ m s}^{-1}$  sont communément associées à des SDE alors que des vitesses plus faibles sont associées aux SDI (e.g. Krimmel *et al.*, 1973; Burkinsher, 1983). La répétition de ces observations au cours d'une saison permet alors de mettre en évidence une évolution des systèmes de drainage au cours du temps. Par exemple pour le glacier d'Arolla, Nienow *et al.* (1998) Nienow (Sharp) ont montré que l'on passait au

cours de l'été d'un SDI à un SDE. En plus de donner des informations sur le système de drainage existant, ces mesures de temps de transfert permettent de valider les résultats de modèles hydrologiques comme présentés par Arnold *et al.* (1998).

- (ii) La mesure du volume de traceurs recouvrés se fait en général en mesurant des concentrations dans le torrent émissaire et en utilisant le débit du cours d'eau pour les convertir en volume. Ainsi, si moins de la moitié de la quantité de traceur est retrouvé à l'exutoire après un temps donné, on peut penser à des pertes ou à un stockage important d'eau dans le système de drainage (Willis *et al.*, 1990), ce qui semble arriver plus fréquemment dans un système complexe mais peut aussi être dû à la sorption (absorption ou adsorption) du marqueur sur les particules en suspension dans l'eau.
- (iii) L'étude de la forme de courbes présentant l'évolution de la concentration de traceurs recouvrée en fonction du temps permet de fournir de nouveaux détails quant aux caractéristiques des systèmes de drainage (Behrens *et al.*, 1975). En effet la forme de ces courbes, comme présentée sur la Figure 4.1, permet de quantifier un terme de dispersion qui œuvre dans le système de drainage (Seaberg *et al.*, 1988).

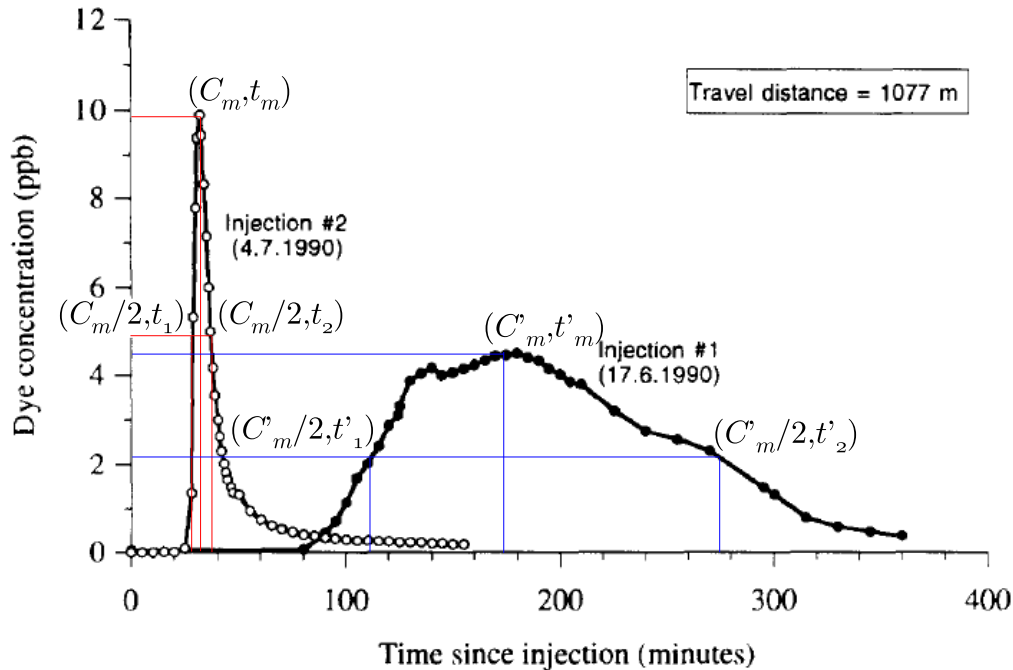


FIG. 4.1: Évolution de la concentration de colorant mesurée lors de deux expériences d'injection menées sur un moulin du glacier d'Arolla. L'injection #1 conduite en juin montre un temps de retour long permettant de calculer une vitesse de transit de l'ordre de  $0.1 \text{ m s}^{-1}$ . Cette vitesse est caractéristique d'un drainage s'effectuant principalement sous une forme distribuée. L'injection #2 conduite en juillet montre par contre un temps de retour plus court et un pic plus marqué donnant des vitesses de transit de l'ordre de  $0.54 \text{ m s}^{-1}$  indiquant le développement d'un SDE. Les coordonnées des différents points permettent de calculer le coefficient de dispersion. Figure adaptée de Hubbard et Nienow (1997).

On utilise pour quantifier cet «étalement» des concentrations de retour (concentrations que l'on observe en sortie de système hydrologique) un terme de dispersivité  $d$  [en m] qui représente le taux de dispersion d'un nuage de traceur décrit par le coefficient de dispersion  $D$  [en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ] relativement au taux d'advection  $u_t$  en [ $\text{m s}^{-1}$ ] du traceur durant son transit dans le système de drainage :

$$d = \frac{D}{u_t}. \quad (4.1)$$

En glaciologie, la forme communément admise pour  $D$  a été dérivée par Brugman (1986) :

$$D = \frac{x^2 (t_m - t_i)^2}{4t_m^2 t_i \ln(2(t_m/t_i)^{1/2})}, \quad (4.2)$$

où  $x$  correspond à la distance en ligne droite entre le point d'injection et le point de récupération du traceur,  $t_m$  est le temps écoulé avant d'atteindre le pic. Enfin  $t_i$  pour  $i = 1, 2$  sont les temps lorsque la concentration atteint la moitié de sa concentration maximale pour la branche ascendante ( $t_1$ ) et pour la branche descendante ( $t_2$ ). Les différentes variables sont reportées sur la Figure 4.1. A partir des deux équations obtenues ( $i = 1, 2$ ) les valeurs de  $D$  et  $t_m$  sont calculées par itérations successives.

Toutefois, ces expériences de traceurs ne permettent de déduire que des caractéristiques globales du système de drainage. Le recours à des mesures effectuées dans des trous de forage permet alors d'obtenir des informations plus ponctuelles ou à plus petite échelle que celle du bassin complet.

- (i) Si les forages sont directement liés au système de drainage, alors le niveau de l'eau observé dans ces forages correspond à la charge hydraulique du système de drainage. Cette observation n'est valable que dans le cas où l'on considère que le volume d'eau transporté par le système de drainage est suffisant pour remplir le trou de forage sans changer ses caractéristiques. Ainsi, par cette technique, Boulton *et al.* (2007b) ont mis en évidence le lien qui existe entre deux systèmes de drainage en mesurant la charge hydraulique le long d'un profil perpendiculaire à la direction principale d'écoulement du glacier. Si des sondes de pression sont mises en place dans les trous de forage, alors le niveau d'eau peut être suivi durant de longues périodes sans qu'il soit nécessaire de réouvrir le trou (e.g. Fudge *et al.*, 2008).
- (ii) La mise en place dans ces forages de mesures de conductivité et de turbidité permet aussi de mieux connaître la structure de drainage au niveau de ces forages. Ainsi l'étude de Gordon *et al.* (2001) montre que l'on doit étudier avec précaution les données issues de trous de forage et qu'il faut vérifier leur connectivité au système hydraulique avant de faire des suppositions quant à ce dernier.
- (iii) L'étude de trous de forage non connectés au système hydrologique a aussi son importance. En effet une étude de Waddington et Clarke (1995) montre qu'à partir d'un trou de forage non connecté au réseau, on peut remonter aux caractéristiques décrivant les sédiments présents à la base des glaciers.

A partir de ces différents modes d'observation, les systèmes hydrauliques sous-glaciaires peuvent être modélisés à des fins hydrologiques. Pour mettre en place la modélisation à but glaciologique, il faut ajouter à ces observations des mesures de la dynamique du glacier.

Les mesures liées à la dynamique glaciaire sont courantes en glaciologie. Elles s'intéressent aux différentes composantes de la dynamique que sont la déformation de la glace, le glissement et la déformation du sédiment. En vue de mettre en place une modélisation hydrologique à but glaciologique on devra donc disposer des mesures effectuées sur le système hydraulique comme décrit ci-dessus simultanément à des mesures de dynamique. Différentes études couplant des observations hydrologiques et glaciologiques sont présentées dans le Tableau 4.1.

TAB. 4.1: Différentes études hydrologiques à vocation glaciologique et les méthodes de mesures mises en œuvre. La notation  $h_w$  correspond à la charge hydraulique.

Référence de l'étude	mesures hydrologiques	mesures glaciologiques
Anderson <i>et al.</i> (2004)	débit au front	vitesses de surface GPS <sup>a</sup>
Bartholomäus <i>et al.</i> (2008)	$h_w$ de lacs	vitesses de surface GPS <sup>a</sup>
Fischer et Clarke (2001)	pression d'eau basale	glissement et déformation de sédiments
Iken et Truffer (1997)	$h_w$ dans des forages	vitesses de surfaces GPS <sup>b</sup>
Magnússon <i>et al.</i> (2007, 2010)	mesures de débit	vitesses de surface InSAR
Mair <i>et al.</i> (2001, 2002, 2003)	$h_w$ dans des forages	vitesses de surfaces GPS <sup>b</sup>
Mair <i>et al.</i> (2008)	$h_w$ dans des forages	variation de l'inclinaison de forages

<sup>a</sup> système autonome, mesures en continu

<sup>b</sup> mesure de positions de balises, mesures ponctuelles

Les différentes techniques de mesure que l'on a présentées ici permettent de mettre en place des modèles hydro-glaciologiques à vocation hydrologique ou glaciologique. Certains de ces modèles sont présentés dans la partie suivante.

#### 4.1.2.2 Les modèles hydro-glaciologiques

Dans un souci de clarté, on parlera en premier lieu des modèles à vocation hydrologique avant de se pencher sur les modèles à vocation glaciologique.

**Les modèles à vocation hydrologique** visent à décrire précisément les débits d'eau que l'on observe dans les torrents qui prennent naissance au front des glaciers. Certains de ces modèles se basent sur le calcul d'un potentiel hydraulique  $\Phi$  définis par Shreve (1972) :

$$\Phi = \rho_w g z_b + \rho_i g (z_t - z_b), \quad (4.3)$$

où  $\rho_w$  et  $\rho_i$  sont respectivement les masses volumiques de l'eau et de la glace alors que  $z_t$  et  $z_b$  correspondent aux altitudes respectives de la surface et de la base du glacier. A partir de cette expression, et de nombreux tests de traceurs, Sharp *et al.* (1993) ont déterminé le système de drainage du glacier d'Arolla (Suisse). Plusieurs modèles hydrologiques ont alors été développés



à partir de la configuration du système de drainage donné par Sharp *et al.* (1993). Richards *et al.* (1996) ont mis en place un modèle constitué de quatre réservoirs à deux paramètres qui représentent les différentes composantes du système de drainage. Arnold *et al.* (1998) ont conçu un modèle sur des bases physiques. Ils ont délimité pour cela les sous bassins versants de chacun des moulins définis comme points d'entrée du système par Sharp *et al.* (1993). Un modèle d'ablation par bilan d'énergie permet alors de calculer le volume d'eau produit dans chacun de ces sous bassins. Ces volumes d'eau sont alors «routés» à la surface du glacier et le temps de transfert de l'eau entre un point donné et le moulin est calculé en fonction de son éloignement et de l'épaisseur de la couche de neige à travers laquelle l'eau devra percoler. L'eau est ensuite prise en charge par un système de drainage sous-glaciaire distribué (durant l'hiver) ou chenalisé (pendant l'été) jusqu'à être évacuée au front du glacier. Ce modèle donne des résultats intéressants tant au niveau de la comparaison des flux au front du glacier que de la charge hydraulique mesurée et modélisée au niveau des trous de forage.

L'étude de Flowers et Clarke (2002) se démarque des précédentes par le fait que le système de drainage n'est pas prescrit comme c'était précédemment le cas au travers du potentiel hydraulique donné par Shreve (1972). Dans ce modèle, l'eau est prise en charge par quatre systèmes différents (supra-glaciaire, intra-glaciaire, sous-glaciaire et nappe souterraine) qui sont connectés par des termes de transfert. Ainsi ce modèle s'adapte automatiquement au volume d'eau qu'il reçoit tant en terme de géométrie que de capacité d'évacuation. Ce même modèle a ensuite été simplifié pour s'intéresser uniquement mais plus précisément au drainage sous-glaciaire (Flowers *et al.*, 2003; Flowers, 2008). Dans ces nouvelles versions, seule la portion du modèle sous-glaciaire est conservée et séparée en deux couches présentant des SDE et SDI.

Le modèle développé par Moeller *et al.* (2007) vise un objectif différent de ceux précédemment cités. En effet, ce modèle est conçu pour confirmer le fait qu'une couche de sédiments ne suffit pas à évacuer la totalité de l'eau produite par un glacier donné. Ce modèle se base sur le transfert de l'eau au travers d'une couche de sédiments à laquelle est ajoutée une couche drainante. La conductivité de cette couche drainante est définie de sorte que la pression d'eau à la base du glacier reste en dessous de la pression nécessaire pour amener le glacier à la flottaison. Cette étude montre bien la nécessité d'un SDE qui permet d'éviter la mise à la flottaison de tout le glacier.

**Les modèles à vocation glaciologique** ont pour objectif de mieux contraindre la vitesse de glissement à la base des glaciers en la liant à la pression de l'eau sous-glaciaire par l'intermédiaire d'une loi de frottement. Cette approche récente de l'hydrologie sous-glaciaire n'a été appliquée qu'à un nombre de cas réduit car seul un petit nombre de modèles peuvent modéliser ces interactions. Les modèles utilisés dans le cadre de cette approche sont généralement plus simples que les modèles à vocation hydrologique. En effet, ici, le point d'intérêt du modèle est de fournir la pression d'eau à la base du glacier. Ainsi ces modèles négligent en général les systèmes de drainage supra- et intra-glaciaires pour s'intéresser plus précisément aux systèmes de drainage sous-glaciaires. Par contre, certaines approximations faites par les modèles à vocation hydrologique ne peuvent être faites ici. Ainsi l'expression du gradient hydraulique donnée par Shreve (1972) ne peut être utilisée car elle suppose que la pression effective est nulle ce qui n'est pas compatible avec l'utilisation de lois de frottement.

Le modèle proposé par Kessler et Anderson (2004) illustre bien les simplifications du système hydrologique qui sont mises en place pour accéder à la pression d'eau. Ainsi, ce modèle se base sur une équation de conservation du volume d'eau qui est «routée» à travers trois types de systèmes différents présentés sur la Figure 4.2.

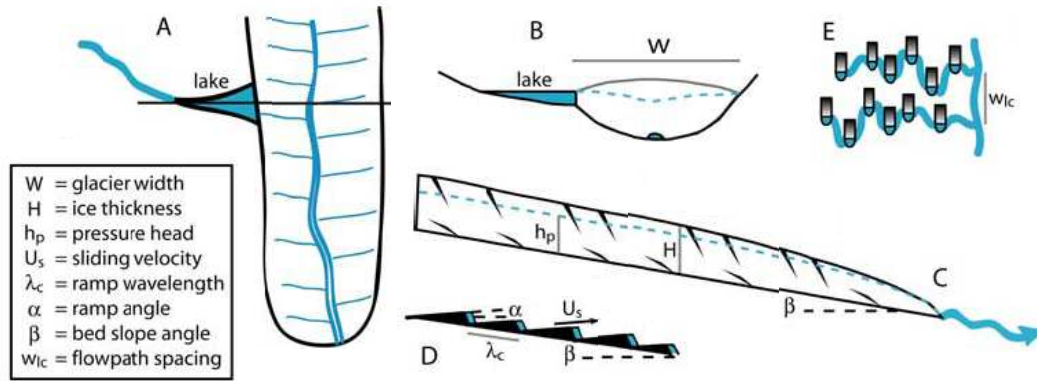


FIG. 4.2: Présentation des différentes composantes du modèle de Kessler et Anderson (2004). A) vue en plan du glacier et du système de drainage (en bleu) avec un canal de drainage efficace au centre connecté à de nombreux conduits inefficaces formés par un réseau de cavités modélisées comme présenté en E). La section B) montre la charge hydraulique (tireté) imposée par le lac. C) montre une coupe longitudinale du glacier et D) présente le détail de la géométrie du socle rocheux.

Dans ce modèle, le système de drainage est à géométrie fixe mais sa capacité évolue en fonction du volume d'eau à drainer. La vitesse de glissement est ici calculée par une loi de frottement développée par Iken et Truffer (1997) et reprise par Anderson *et al.* (2004). Ce modèle permet alors de reproduire la dynamique que l'on observe lors de la mise en pression du système hydrologique au printemps (Figure 4.3).

Le passage du modèle développé par Flowers et Clarke (2002) de quatre couches à seulement deux couches concentrées sur le système de drainage sous-glaciaire permet de mettre en place des modélisations à vocation glaciologique (Flowers *et al.*, 2005). Dans ce modèle, le glissement basal est décrit par une loi adaptée de Payne (1995) et utilisant  $F = p_w/p_i$  le rapport de la pression d'eau  $p_w$  sur la pression glaciostatique  $p_i$  pour lier la vitesse de glissement  $u_b$  à la contrainte basale  $\tau_b$  sous la forme :

$$u_b = -B_s F \rho_i g h_i \text{grad}(h_i + z_b), \quad (4.4)$$

où  $B_s$  est un paramètre contrôlant le taux de glissement et  $h_i$  l'épaisseur de la glace. Ce modèle, couplé de manière asynchrone avec un modèle de dynamique glaciaire a été utilisé pour évaluer la sensibilité de la calotte Islandaise du Vatnajökull au réchauffement climatique (Flowers *et al.*, 2005).

Avec le même type d'approche, Hewitt et Fowler (2008) proposent un système de drainage mettant en compétition des canaux R (de type «Röthlisberger») et un réseau de cavités liés par un terme de transfert. La pression effective alors calculée est utilisée pour modéliser la

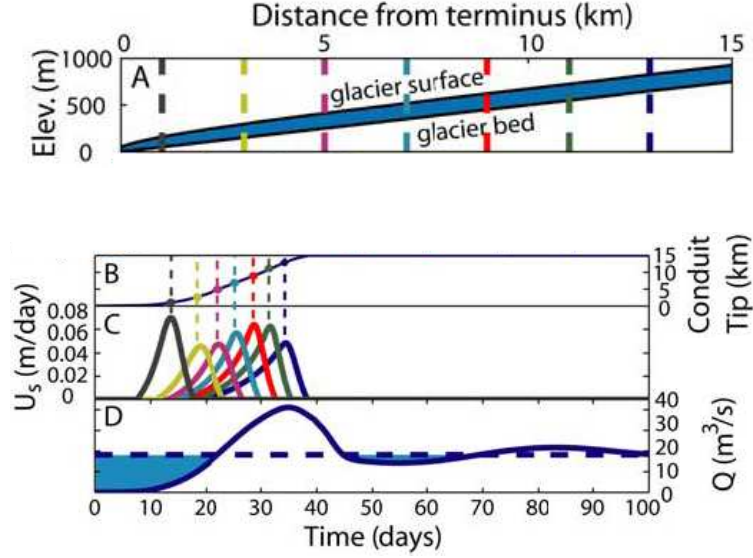


FIG. 4.3: Résultats obtenus par Kessler et Anderson (2004) pour la modélisation d'un événement d'accélération dû à la mise en charge du système de drainage. A) montre une coupe le long du glacier où les lignes de couleurs indiquent la localisation des données présentées sur B et C. B) montre l'évolution de la position de la source du canal central. C) présente l'évolution des vitesses de surface en fonction du temps aux points marqués sur A). D) présente l'évolution du débit d'eau injectée (tireté) et du débit au front du glacier (trait plein).

vitesse de glissement en se basant sur une loi puissance (équation (2.18)). Cette étude s'attache à modéliser des ondes de vitesses observées tout au long de l'année sur le glacier Nisqually (état de Washington, U.S.A.).

Le modèle développé dans ce travail s'inspire de ces approches multicouches dans lesquelles un terme de transfert permet de mettre en compétition les composantes efficaces et inefficaces du système de drainage. La particularité du modèle développé ici est de se baser sur la même équation de diffusion (décrite dans la Partie 4.2) pour décrire les deux composantes du système. Le lien entre hydrologie sous-glaciaire et dynamique glaciaire sera alors mis en place sous la forme de l'équation de frottement (2.20) proposée par Gagliardini *et al.* (2007).

## 4.2 Un modèle hydrologique basé sur l'équation de diffusion

Nous allons présenter dans cette partie, les hypothèses ainsi que la méthodologie qui permettent d'aboutir à l'équation de diffusion décrivant le routage de l'eau à la base du glacier. C'est cette équation qui sera implémentée dans le code aux éléments finis Elmer. Le travail présenté dans cette partie s'inspire des travaux publiés par Bear (1979, 1988) et de Marsily (2004).

### 4.2.1 Développement de l'équation de diffusion pour une nappe captive

La théorie de la diffusivité est ici appliquée à une nappe aquifère confinée. Cela revient à dire que l'on traite le cas d'un aquifère piégé entre deux couches imperméables. Ici, les deux imperméables seront la base du glacier pour le toit de la couche et le socle rocheux pour sa base. L'hypothèse faite d'un aquifère confiné implique aussi que la couche de sédiments soit saturée en eau. De plus, la couche d'eau étant maintenue entre les deux imperméables, toute augmentation de volume entraînera une augmentation de la pression d'eau dans le milieu. Du fait de l'enfouissement important de ces nappes captives, la pression d'eau peut devenir très importante, ce qui demande de considérer dans les équations que l'eau, mais aussi le milieu poreux, sont des matériaux compressibles. Cette compressibilité du milieu poreux nécessite la prise en compte du mouvement des grains solides constituant le sédiment dans les équations de continuité.

Ce traitement complet de l'équation de diffusion demande aussi de définir un certain nombre de vitesses pour les différents matériaux mis en jeu dans l'écoulement (fluide et grains solides) :

- (i) La vitesse fictive décrit la vitesse de déplacement d'un matériau comme un débit divisé par la surface totale de l'échantillon même si le matériau ne se déplace effectivement que dans une certaine portion de cette surface.
- (ii) La vitesse de filtration a été définie par Darcy (1856) comme la vitesse fictive de l'eau à travers le milieu poreux en prenant les grains solides comme référence.
- (iii) La vitesse réelle enfin représente effectivement la vitesse réelle du matériau.

Un schéma illustrant ces différentes vitesses est présenté sur la Figure 4.4.

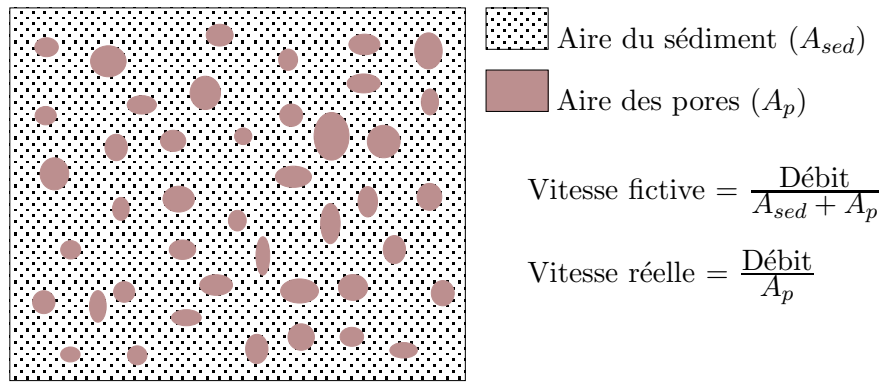


FIG. 4.4: Schéma d'une section de milieu poreux avec les définitions des différentes surfaces et des vitesses fictives et réelles du fluide.

Le développement de l'équation de diffusion dans un aquifère confiné se base sur la loi de Darcy (1856) qui définit la vitesse de filtration  $\mathbf{U}$  d'un fluide à travers un milieu poreux. En effet, la définition de cette vitesse provient directement de la manière dont ont été effectuées les expériences de Darcy en 1856, laquelle définit un débit à travers un massif poreux. Ce débit est alors divisé par la section du massif poreux pour donner la vitesse de filtration ou vitesse de Darcy.

La loi de Darcy (1856) met en jeu, pour définir cette vitesse de filtration, le tenseur des perméabilités intrinsèques du solide  $\mathbf{k}$  qui prend en compte l'hétérogénéité de la diffusion dans les différentes directions, la viscosité dynamique du fluide  $\mu_w$ , la masse volumique du fluide  $\rho_w$ , la pression de l'eau  $p_w$  observée au point d'altitude  $z$  et enfin l'accélération de la gravité  $g$  :

$$\mathbf{U} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu_w} (\text{grad } p_w + \rho_w g \text{ grad } z) . \quad (4.5)$$

La vitesse de filtration  $\mathbf{U}$  représente la vitesses fictive du fluide par rapport au solide. Or on considère ici le déplacement du fluide par rapport à un point fixe. On doit donc exprimer la vitesse  $\mathbf{U}$  en fonction des vitesses de déplacement du solide et du fluide. En repartant de la définition de la vitesse de filtration on a :

$$\mathbf{U} = \frac{\text{Débit}}{A_{sed} + A_p} , \quad (4.6)$$

avec respectivement  $A_{sed}$  et  $A_p$  les aires du sédiment et des pores. La porosité  $\omega$  du milieu peut alors être exprimée en fonction de ces aires si on considère qu'elles sont représentatives de tout le volume de l'échantillon :

$$\omega = \frac{\text{volume de vide}}{\text{volume de l'échantillon}} = \frac{A_p}{A_{sed} + A_p} . \quad (4.7)$$

A partir de la porosité, on définit les vitesses réelles moyennes du fluide  $\mathbf{u}_w^*$  et du solide  $\mathbf{u}_s^*$  :

$$\mathbf{u}_w^* = \frac{\mathbf{U}_w}{\omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_s^* = \frac{\mathbf{U}_s}{1 - \omega} , \quad (4.8)$$

avec  $\mathbf{U}_w$  et  $\mathbf{U}_s$  respectivement les vitesses de filtration du fluide et du solide. La vitesse de Darcy est alors exprimée en fonction de ces deux vitesses réelles moyennes par une composition géométrique définie par Cooper (1966) :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_w - \omega \mathbf{u}_s^* . \quad (4.9)$$

L'équation de Darcy (4.5) s'écrit alors :

$$\mathbf{U}_w - \omega \mathbf{u}_s^* = -\frac{\mathbf{k}}{\mu_w} (\text{grad } p_w + \rho_w g \text{ grad } z) . \quad (4.10)$$

En raisonnant sur un volume élémentaire fixe de l'espace, les équations de conservation de la masse sont définies pour le fluide :

$$\text{div}(\rho_w \mathbf{U}_w) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \omega) + \rho_w q = 0 , \quad (4.11)$$

où  $q$  correspond à un débit par unité de volume de fluide entrant (ou sortant s'il est négatif) dans le milieu poreux. Pour le solide on obtient :

$$\text{div}(\rho_s \mathbf{U}_s) + \frac{\partial}{\partial t}[(1 - \omega)\rho_s] = 0 , \quad (4.12)$$

avec  $\rho_s$  la masse volumique du milieu poreux.

On injecte la loi de Darcy (4.10) dans l'équation de continuité du fluide dans le cas d'un volume élémentaire (4.11). On obtient alors :

$$\operatorname{div} \left[ \rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu_w} (\operatorname{grad} p_w + \rho_w g \operatorname{grad} z) \right] = \operatorname{div}(\rho_w \omega \mathbf{u}_s^\star) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \omega) + \rho_w q. \quad (4.13)$$

A partir des opérateurs gradient et divergence, on fait apparaître la dérivée de transport de  $\rho_w \omega$  qui représente la variation de la quantité  $\rho_w \omega$  en fonction du déplacement moyen du solide à la vitesse  $\mathbf{u}_s^\star$  :

$$\operatorname{div}(\rho_w \omega \mathbf{u}_s^\star) = \rho_w \omega \operatorname{div} \mathbf{u}_s^\star + \mathbf{u}_s^\star \operatorname{grad}(\rho_w \omega), \quad (4.14)$$

$$\text{et,} \quad \mathbf{u}_s^\star \operatorname{grad}(\rho_w \omega) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \omega) = \frac{d}{dt}(\rho_w \omega), \quad (4.15)$$

$$\text{donc,} \quad \operatorname{div}(\rho_w \omega \mathbf{u}_s^\star) = \rho_w \omega \operatorname{div} \mathbf{u}_s^\star + \frac{d}{dt}(\rho_w \omega) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \omega). \quad (4.16)$$

On remplace alors dans l'équation (4.12) la vitesse de déplacement fictive du solide par sa définition en fonction de la vitesse macroscopique moyenne,  $\mathbf{U}_s = (1 - \omega)\mathbf{u}_s^\star$  :

$$\operatorname{div}(\rho_s(1 - \omega)\mathbf{u}_s^\star) + \frac{\partial}{\partial t}[(1 - \omega)\rho_s] = 0, \quad (4.17)$$

qui une fois exprimée en terme de dérivée particulaire devient :

$$(1 - \omega)\rho_s \operatorname{div} \mathbf{u}_s^\star + \frac{d}{dt}[(1 - \omega)\rho_s] = 0. \quad (4.18)$$

En combinant les équations (4.16) et (4.18), on peut exprimer la vitesse du solide en fonction des autres inconnues :

$$\operatorname{div}(\rho_w \omega \mathbf{u}_s^\star) = - \left( \frac{\rho_w \omega}{(1 - \omega)\rho_s} \right) \frac{d}{dt}[(1 - \omega)\rho_s] + \frac{d}{dt}(\rho_w \omega) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \omega). \quad (4.19)$$

En réinjectant cette équation (4.19) dans (4.13) et en supposant que la porosité varie peu en fonction du temps, on élimine les termes dans lesquels la vitesse du solide apparaît :

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\rho_w \mathbf{k}}{\mu_w} (\operatorname{grad} p_w + \rho_w g \operatorname{grad} z) \right] = \omega \frac{d\rho_w}{dt} + \frac{\rho_w}{1 - \omega} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\rho_w \omega}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} + \rho_w q. \quad (4.20)$$

Cette équation permet alors de calculer la pression d'eau dans la nappe captive. On peut simplifier son écriture en exprimant les différentes densités et la porosité en fonction de la pression d'eau. On utilise pour cela les équations d'état du fluide et du milieu poreux comme présentées dans la section suivante.

### 4.2.2 Introduction des équations d'état

Les équations d'état du liquide et du solide permettent de définir leurs densités et la porosité du milieu en fonction de la pression d'eau  $p_w$ . Pour le liquide, l'équation mise en jeu est l'équation de compressibilité isotherme :

$$\frac{d\rho_w}{dt} = \rho_w \beta_l \frac{dp_w}{dt}, \quad (4.21)$$

où la compressibilité du fluide  $\beta_l$  est facilement mesurable (Perkins, 1820).

Pour le milieu poreux, la mise en place d'une équation d'état est moins évidente. En effet le matériau que l'on traite est un mélange binaire d'air et de solide. Il présentera donc deux compressibilités différentes : d'une part, la compressibilité des grains solides que l'on écrit :

$$\frac{d\rho_{gs}}{\rho_{gs}} = \beta_s dp_w, \quad (4.22)$$

où  $\rho_{gs}$  est la masse volumique des grains solides et pour laquelle le coefficient de compressibilité  $\beta_s$  est mesurable sur le matériau pur. D'autre part, la compressibilité de la matrice poreuse est définie en se basant sur la théorie de l'élasticité des milieux continus. Les développements de cette théorie, présentés dans l'Annexe B fournissent deux nouvelles équations :

$$\frac{d\omega}{dt} = (1 - \omega)(\alpha - \alpha_s) \frac{dp_w}{dt}, \quad (4.23)$$

$$\frac{d\rho_s}{dt} = -\rho_s \alpha_s \frac{dp_w}{dt}, \quad (4.24)$$

$$\text{où} \quad \alpha_s = \frac{\omega}{1 - \omega} \beta_s.$$

Ici, le coefficient  $\alpha$  est la compressibilité spécifique du milieu poreux dans son ensemble. Ce coefficient prend donc en compte le réarrangement des grains les uns par rapport aux autres alors que  $\alpha_s$  décrit uniquement la compressibilité du solide pur.

En introduisant les deux équations d'état du solide (4.23) et (4.24) où l'on remplace  $\alpha_s$  par son expression, ainsi que celle du fluide (4.21), on peut alors réécrire l'équation (4.20) uniquement en fonction de la pression de l'eau :

$$\text{div} \left[ \frac{\rho_w \mathbf{k}}{\mu_w} (\text{grad } p_w + \rho_w g \text{ grad } z) \right] = \rho_w \omega \left[ \beta_l - \beta_s + \frac{\alpha}{\omega} \right] \frac{dp_w}{dt} + \rho_w q. \quad (4.25)$$

On multiplie alors cette équation par l'accélération de la gravité  $g$  pour faire apparaître le tenseur des conductivités hydrauliques  $\mathbf{K}$  :

$$\text{div} [\mathbf{K} (\text{grad } p_w + \rho_w g \text{ grad } z)] = \rho_w \omega g \left[ \beta_l - \beta_s + \frac{\alpha}{\omega} \right] \frac{dp_w}{dt} + \rho_w g q, \quad (4.26)$$

$$\text{avec, } \mathbf{K} = \frac{\rho_w g \mathbf{k}}{\mu_w}. \quad (4.27)$$

Certaines approximations permettent alors de simplifier l'équation (4.26). La première de ces approximations consiste à considérer que la masse volumique de l'eau  $\rho_w$  est variable dans le temps mais peu variable dans l'espace, ce qui permet de sortir le terme  $\rho_w g$  de l'opérateur divergence. Le terme de gauche de l'équation (4.26) se simplifie alors sous la forme :

$$\operatorname{div} [\mathbf{K} (\operatorname{grad} p_w + \rho_w g \operatorname{grad} z)] \simeq \rho_w g \operatorname{div} \left[ \mathbf{K} \operatorname{grad} \left( \frac{p_w}{\rho_w g} + z \right) \right]. \quad (4.28)$$

Cette simplification met en évidence l'expression de la charge hydraulique :

$$h_w = \frac{p_w}{\rho_w g} + z. \quad (4.29)$$

En injectant (4.29) dans (4.28) l'équation (4.26) devient :

$$\rho_w g \operatorname{div} [\mathbf{K} \operatorname{grad} h_w] = \rho_w \omega g \left[ \beta_l - \beta_s + \frac{\alpha}{\omega} \right] \frac{dp_w}{dt} + \rho_w g q. \quad (4.30)$$

On doit encore, dans cette équation, convertir la dérivée particulaire de la pression en charge hydraulique. Avec la même définition que pour l'équation (4.15), la dérivée particulaire de  $p_w$  s'écrit :

$$\frac{dp_w}{dt} = \mathbf{u}_s^* \operatorname{grad} p_w + \frac{\partial p_w}{\partial t}. \quad (4.31)$$

Étant donné que la vitesse du sédiment est très faible devant celle de l'eau, on peut dans l'équation (4.31) négliger le terme  $\mathbf{u}_s^* \operatorname{grad} p_w$  devant  $\partial p_w / \partial t$ . On différencie alors l'expression de la charge hydraulique (4.29) :

$$\frac{\partial p_w}{\partial t} \simeq \rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial t} + g(h_w - z) \frac{\partial \rho_w}{\partial t}, \quad (4.32)$$

dans laquelle l'équation d'état du fluide (4.21) est introduite :

$$\rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial t} = \frac{\partial p_w}{\partial t} [1 + \rho_w g(z - h_w)\beta_l]. \quad (4.33)$$

Le terme  $\rho_w g(z - h_w)\beta_l$  est généralement négligeable devant 1. En effet, si l'on suppose  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\beta_l = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  et  $\rho_w = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  la valeur absolue de ce terme est alors inférieure à  $1 \times 10^{-2}$  tant que  $(h_w - z)$  est inférieure à 2000m ce qui donne :

$$\rho_w g \frac{\partial h_w}{\partial t} \simeq \frac{\partial p_w}{\partial t}. \quad (4.34)$$

On peut alors réécrire l'équation (4.30) uniquement en fonction de la charge hydraulique  $h_w$  :

$$\rho_w g \operatorname{div} [\mathbf{K} \operatorname{grad} h_w] = (\rho_w g)^2 \omega \left[ \beta_l - \beta_s + \frac{\alpha}{\omega} \right] \frac{\partial h_w}{\partial t} + \rho_w g q. \quad (4.35)$$



Dans l'équation (4.35) on met en évidence la deuxième grandeur physique qui, avec la conductivité hydraulique, permet de décrire une couche aquifère. Cette grandeur, le coefficient d'emmagasinement spécifique  $S_s$ , est définie comme suit :

$$S_s = \rho_w g \omega \left[ \beta_l - \beta_s + \frac{\alpha}{\omega} \right]. \quad (4.36)$$

La compressibilité de l'eau  $\beta_l$  est de l'ordre de  $5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ . On trouve pour des sédiments glaciaires des valeurs de  $\alpha$  de l'ordre de  $3 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$  (Murray, 1997). La valeur de  $\beta_s$  par contre est de l'ordre de  $\beta_l/25$  (Freeze et Cherry, 1979) ce qui permet de la négliger devant les deux autres termes.

Après ces simplifications, l'équation de diffusion dans une nappe confinée s'écrit donc :

$$\rho_w g \operatorname{div} [\mathbf{K} \operatorname{grad} h_w] = \rho_w g S_s \frac{\partial h_w}{\partial t} + \rho_w g q, \quad (4.37)$$

qui peut finalement être simplifiée par  $\rho_w g$  pour finalement donner :

$$\operatorname{div} [\mathbf{K} \operatorname{grad} h_w] = S_s \frac{\partial h_w}{\partial t} + q, \quad (4.38)$$

### 4.2.3 Passage à un problème plan à deux dimensions

En vue de réduire la complexité de la modélisation et les temps de calcul, l'équation de diffusion (4.38) est intégrée verticalement. Cette intégration permet en effet de ne pas modéliser la couche de sédiments pour effectuer uniquement le calcul de la charge hydraulique à l'interface entre glace et socle rocheux. Cette étape d'intégration va dans le sens que l'on a choisi pour le modèle qui est de calculer la charge hydraulique à des fins de glissement basal et non à des fins purement hydrologiques.

Si l'on suppose que les termes  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  et  $S_s$  sont uniformes sur toute l'épaisseur  $e$  de l'aquifère, on peut intégrer l'équation (4.38) par rapport à la verticale. On définit alors les termes intégrés tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int_{base}^{toit} \mathbf{K} dz = e \mathbf{K}, \\ S &= \int_{base}^{toit} S_s dz = e S_s, \\ Q &= \int_{base}^{toit} q dz = e q, \end{aligned} \quad (4.39)$$

et l'équation de diffusion intégrée sur toute l'épaisseur de l'aquifère s'écrit alors :

$$\operatorname{div} (\mathbf{T} \operatorname{grad} h_w) = S \frac{\partial h_w}{\partial t} + Q. \quad (4.40)$$

Où l'on rappelle que :

$$\mathbf{T} = e\mathbf{K} = e \frac{\rho_w g \mathbf{k}}{\mu_w} \text{ et, } S = eS_s = e\rho_w g \omega \left[ \beta_l - \beta_s + \frac{\alpha}{\omega} \right]. \quad (4.41)$$

C'est cette équation de diffusion qui est implémentée dans Elmer. Ici,  $\mathbf{T}$  correspond à la transmissivité de l'aquifère alors que  $S$  est le coefficient d'emménagement de la nappe et  $Q$  un débit par unité de surface. Ce débit est proportionnel à la variation de charge hydraulique dans la nappe et représente donc un débit perpendiculaire à la base de l'aquifère.

### 4.3 Implémentation de l'équation de diffusion dans Elmer

L'équation de diffusion avait déjà été implémentée dans Elmer pour calculer des flux de chaleur. J'ai donc remanié cette partie du code pour l'adapter à ce nouveau problème. Après modification de la routine présente dans le code, j'ai réalisé quelques validations pour vérifier son implémentation. La première étape a consisté à vérifier qu'un état stationnaire donné par le modèle était bien en accord avec sa solution analytique. J'ai ensuite vérifié la dépendance aux pas de temps du modèle ainsi que la conservation du volume d'eau. Ces validations ont été menées sur des domaines à deux dimensions ( $x$  et  $z$ ) et donc à une seule dimension ( $x$ ) pour le modèle hydrologique du fait de l'intégration verticale.

#### 4.3.1 Formulation variationnelle

L'équation de diffusion présentée dans la section précédente est résolue par la méthode des éléments finis. On définit donc une formulation variationnelle pour cette équation. On effectue pour cela l'intégration de l'équation de diffusion (4.40) sur le domaine d'étude. On écrit l'intégrale de cette équation en la multipliant par la fonction test  $\phi$  :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T} \text{grad } h_w) \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} S \frac{\partial h_w}{\partial t} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} Q \phi \, d\Omega. \quad (4.42)$$

On intègre alors le terme de gauche de l'équation en utilisant le théorème de Green :

$$- \int_{\Omega} \mathbf{T} \text{grad } h_w \text{grad } \phi \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{T} \text{grad } h_w \mathbf{n} \phi \, d\Gamma = \int_{\Omega} S \frac{\partial h_w}{\partial t} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} Q \phi \, d\Omega. \quad (4.43)$$

La loi de Darcy une fois intégrée s'écrit :

$$\mathbf{U}_s = -\mathbf{T} \text{grad } h_w, \quad (4.44)$$

où  $\mathbf{U}_s$  est le débit de la nappe par unité de longueur. En injectant (4.44) dans l'équation (4.43) que l'on remanie on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \mathbf{U}_s \text{grad } \phi \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \mathbf{U}_s \mathbf{n} \phi \, d\Gamma = \int_{\Omega} S \frac{\partial h_w}{\partial t} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} Q \phi \, d\Omega. \quad (4.45)$$

Après linéarisation et discrétisation, cette équation se simplifie sous forme matricielle où le terme de gauche de l'équation (4.45) constitue la matrice du système  $\mathbf{M}$ , l'intégrale sur la surface permet de définir des conditions de Neumann (flux d'eau imposé) et l'intégrale sur le terme source constitue le vecteur force  $\mathbf{F}$ . On identifie alors le vecteur solution  $\mathbf{H}$  tel que :

$$\mathbf{M}\mathbf{H} = \mathbf{F} . \quad (4.46)$$

### 4.3.2 Vérification d'un état stationnaire

La première étape de validation de l'implémentation de l'équation de diffusion consistait à vérifier l'exactitude de la charge hydraulique obtenue pour un état stationnaire. On se base pour cela sur l'équation de diffusion (4.40) à laquelle les termes dépendant du temps sont retranchés :

$$\text{div}(\mathbf{T} \text{ grad } h_w) = Q . \quad (4.47)$$

En considérant  $\mathbf{T}$  uniforme et isotrope dans l'espace, cette équation peut être réécrite en fonction de  $x$  seulement :

$$\frac{\partial^2 h_w}{\partial x^2} = \frac{Q}{T} . \quad (4.48)$$

En considérant que le flux entrant  $Q$  est indépendant de  $x$  on peut alors simplement calculer une solution analytique à cette équation. Des conditions aux limites doivent alors être choisies pour assurer l'unicité de la solution. On choisit pour cette première équation des conditions simples de type Dirichlet appliquées en fixant la charge hydraulique à zéro aux deux extrémités du domaine ( $x = 0$  et  $x = l$ ).

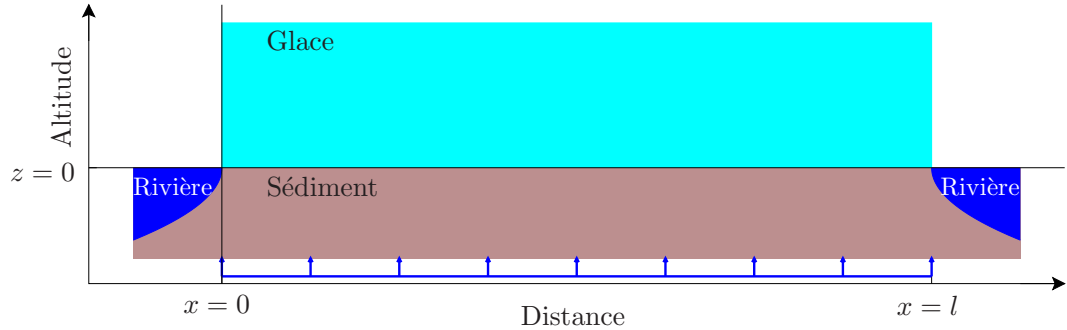


FIG. 4.5: Schéma de l'expérience mise en place pour modéliser l'état stationnaire. Les flèches bleues sous le sédiment représentent le flux  $Q$  injecté à la base de l'aquifère. Les deux rivières constituent les conditions aux limites à charge hydraulique constante et égale à l'altitude de leur surface libre.

La Figure 4.5 présente une vision schématique de l'expérience. La modélisation ne prend en compte que la zone comprise entre  $x = 0$  et  $x = l$ . De plus, le cube de glace représenté n'a pas d'influence sur l'hydrologie. En considérant les hypothèses faites sur  $Q$  et  $\mathbf{T}$  ainsi que les

conditions aux limites, l'équation différentielle (4.48) a pour solution :

$$h_w(x) = (x^2 - lx) \frac{Q}{2T} . \quad (4.49)$$

Les paramètres utilisés pour cette expérience sont présentés dans le Tableau 4.2. La comparaison des résultats du modèle avec la solution de l'équation analytique est présentée sur la Figure 4.6.

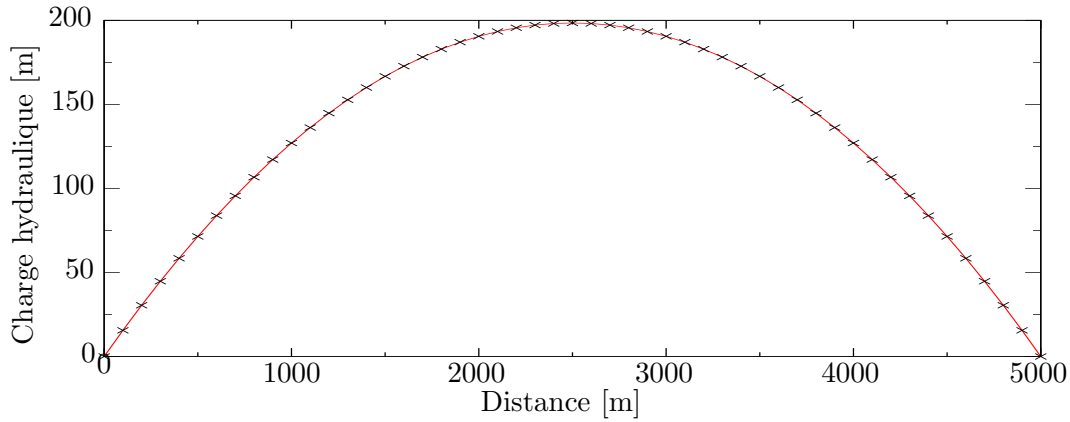


FIG. 4.6: Comparaison à l'état d'équilibre de la solution de l'équation analytique (ligne rouge) aux résultats du modèle (croix noires) pour une recharge  $Q = -0.2 \text{ m a}^{-1}$  et des charges hydrauliques nulles aux bords ( $h_w(0) = h_w(l) = 0$ )

La comparaison entre les résultats numériques issus du modèle et la solution analytique de l'équation différentielle (4.48) montre un accord parfait. On a ainsi vérifié que l'implémentation de l'équation de diffusion était correcte du point de vue du résultat final. Toutefois on doit encore vérifier que le régime transitoire du modèle est correct. On réalise pour cela deux autres expériences qui sont présentées par la suite.

TAB. 4.2: Valeurs des paramètres utilisés pour la validation de l'implémentation de l'équation de diffusion.

Paramètre	Notation	Valeur
Conductivité hydraulique du sédiment	$K_s$	$1 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$
Épaisseur de la couche de sédiments	$e_s$	10 m
Longueur du domaine	$l$	5000 m
Densité de la glace	$\rho_i$	$880 \text{ kg m}^{-3}$
Densité de l'eau	$\rho_w$	$1000 \text{ kg m}^{-3}$
Compressibilité du sédiment	$\alpha$	$1 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
Compressibilité de l'eau	$\beta_l$	$5.04 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
Porosité du sédiment	$\omega$	0.3

### 4.3.3 Importance de la durée des pas de temps

Les processus hydrologiques ne présentent pas les mêmes échelles de temps dans leurs variations que les processus glaciologiques. On travaille en effet à l'échelle de la journée voire de l'heure en hydrologie, alors que les glaciologues utilisent généralement des pas de temps de l'ordre de la dizaine de jours à l'année. Il a donc été nécessaire d'adapter la routine de calcul de la charge hydraulique pour permettre de calculer la répartition de l'eau avec précision sans perdre en efficacité sur le modèle glaciologique. Ce double objectif a nécessité de fragmenter le pas de temps glaciologique (de l'ordre de l'année) dans la routine de calcul de la charge hydraulique pour arriver à un pas de temps hydrologique horaire. Ainsi, entre deux pas de temps du modèle d'écoulement, le modèle hydrologique effectuera un nombre de pas de temps plus important.

En vue de vérifier ces modifications au niveau des pas de temps, les résultats du modèle hydrologique ont été comparés à une solution analytique issue de Carslaw et Jaeger (1959). Cette solution analytique a été développée pour la théorie de la chaleur dont l'équation de diffusion (Carslaw et Jaeger, 1959, p10, équation (8)) est la même que celle qui est résolue dans le cas de la diffusion dans une nappe captive (équation (4.38)). La solution utilisée se base sur la diffusion de la chaleur dans un solide délimité par deux plans parallèles. Cette configuration est similaire à celle d'une nappe hydraulique plane modélisée en deux dimensions (une seule dimension ici du fait de l'intégration verticale de l'équation de diffusion dans Elmer). Les valeurs numériques qui ont été prises pour cette étude sont données dans le Tableau 4.2

Pour confirmer les résultats du modèle du point de vue de sa réponse temporelle, on s'intéresse à un état transitoire durant le remplissage de l'aquifère. A partir d'une charge hydraulique nulle en tous points, l'aquifère est rempli par ses deux extrémités ( $x = 0$  et  $x = l$ ) sur lesquelles on applique une charge hydraulique constante de 100 m. Un schéma représentant cette expérience est présenté sur la Figure 4.7.

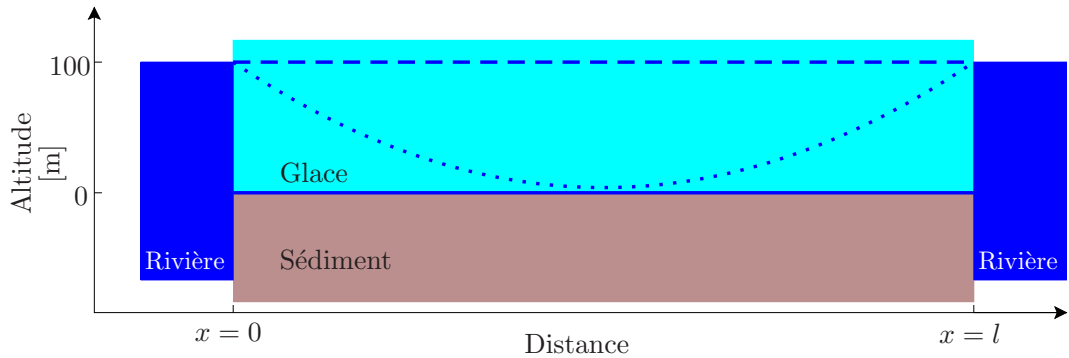


FIG. 4.7: Schéma représentant l'expérience de remplissage d'une nappe. Les rivières jouent (comme dans le cas précédent) le rôle de conditions limites à charge hydraulique constante. Les lignes bleues représentent la charge hydraulique  $h_w$  dans la nappe à différents stades de l'expérience : état initial (ligne pleine), état transitoire à un instant donné (ligne pointillée) et état final (tireté).

Dans l'analogie avec la chaleur, cette expérience revient à réchauffer un solide initialement à une température de  $0^\circ\text{C}$  en appliquant une température uniforme de  $100^\circ\text{C}$  sur les plans parallèles qui le limitent. Dans ce cas particulier, Carslaw et Jaeger (1959) donnent une solution analytique

à l'équation de diffusion que l'on peut écrire en fonction des variables de notre problème :

$$h_w(x, t) = A - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left(-\frac{T(2n+1)^2\pi^2 t}{Sl^2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi(2x-l)}{2l}\right), \quad (4.50)$$

avec  $A = h_w(0) = h_w(l)$ .

La Figure 4.8 présente la variation de la charge hydraulique avec un pas de temps de  $10^{-3}$  an. On ne présente que la moitié droite du domaine ( $l/2 < x < l$ ) car les conditions initiales et aux limites de l'expérience étant symétriques, les charges hydrauliques obtenues le seront aussi. On montre aussi l'évolution de l'erreur entre solutions analytique et numérique en fonction du pas de temps.

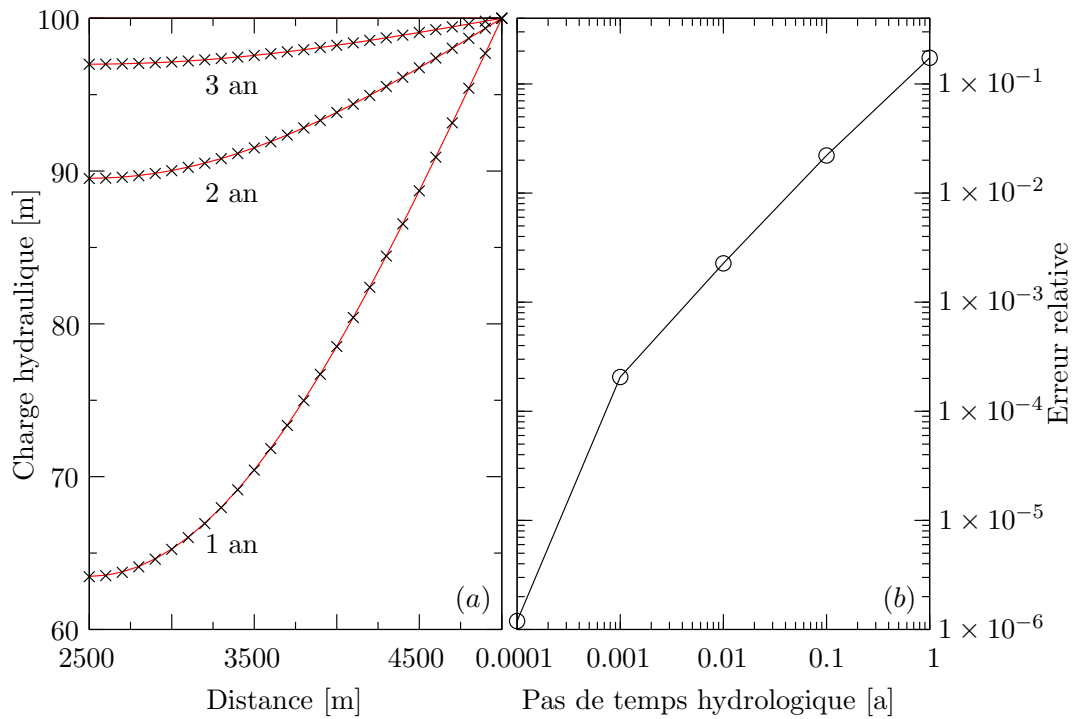


FIG. 4.8: (a) Comparaison des charges hydrauliques analytiques (lignes rouges) et modélisées (croix noires) lors du remplissage de l'aquifère durant trois années de simulation (pas de temps de 0.001 an) et (b) évolution de l'erreur relative entre la référence analytique et les résultats modélisés après un an de simulation en fonction du pas de temps du modèle hydrologique.

La Figure 4.8(b) montre bien l'importance du traitement des pas de temps. On observe en effet une erreur relative par rapport à la solution analytique de l'ordre de 17% si l'on garde le pas de temps glaciologique pour résoudre le système hydrologique. Par contre avec un pas de temps de  $10^{-3}$  an (environ 9 heures) l'erreur est réduite à une quantité négligeable (environ  $1.5 \times 10^{-4}\%$ ).

Cette expérience a donc permis de vérifier que la solution transitoire donnée par le modèle est correcte mais aussi qu'il est essentiel de garder des pas de temps faibles pour la résolution du problème hydrologique. La méthode à deux pas de temps mise en place ici a donc toute son importance quand il s'agit de définir un pas de temps hydrologique de courte durée tout en gardant un pas de temps glaciologique qui ne pénalise pas le temps de calcul du modèle en résolvant trop souvent le système de Stokes.

#### 4.3.4 Conservation du volume

La dernière vérification effectuée porte sur la conservation du volume d'eau au cours du temps. Dans un aquifère confiné, la variation du volume d'eau par unité de surface est fonction à la fois de la variation de la charge hydraulique  $\Delta h_w$  et du coefficient d'emménagement  $S$  de la nappe. La variation du volume d'eau dans la nappe  $\Delta V$  s'écrit donc :

$$\Delta V = S \Delta h_w \quad \text{avec} \quad S = \rho_w g \omega e_s \left( \beta_l + \frac{\alpha}{\omega} \right). \quad (4.51)$$

Pour vérifier la conservation du volume d'eau, avec le même aquifère que précédemment, on effectue l'expérience suivante. Sur une nappe aquifère présentant une charge hydraulique nulle en tous points, on applique à partir d'un temps  $t = 0$  des flux d'eau donnés. Sur l'extrémité  $x = 0$ , on considère une limite imperméable et on injecte, ou soutire de l'eau à la nappe par un forage situé en  $x = l$  suivant l'équation (4.52). On aura donc un flux nul en  $x = 0$  et un flux égal à  $Q_{in}(t)$  en  $x = l$ . La Figure 4.9 présente un schéma de l'expérience où le flux en fonction du temps est donné par l'expression :

$$Q_{in}(t) = 10 \sin \left( 2\pi \frac{t}{25} \right) t \text{ en années.} \quad (4.52)$$

En intégrant l'expression de  $Q_{in}(t)$  et en calculant le volume d'eau dans la nappe à partir de la charge hydraulique, on peut donc comparer le volume d'eau injecté au cours du temps et le volume d'eau présent dans la nappe sur la même durée. La comparaison de ces deux volumes est présentée sur la Figure 4.10

La superposition des deux courbes présentées sur la Figure (4.10) confirme que l'équation de diffusion telle qu'elle a été implémentée dans Elmer conserve bien le volume d'eau au cours du temps. De plus, cette expérience vient confirmer les résultats de la précédente sur l'exactitude de la réponse transitoire du modèle.

Les trois expériences présentées dans cette section ont permis de valider l'implémentation de l'équation de diffusion. Mais cette seule équation ne permet de modéliser qu'un seul type de système de drainage alors que l'on a vu dans la Section 2.3.3 que les systèmes de drainage sous-glaciaires étaient en général composés de deux systèmes en compétition. La section suivante présente la structure que l'on va donner au modèle pour modéliser deux systèmes de drainage à partir de l'équation de diffusion.

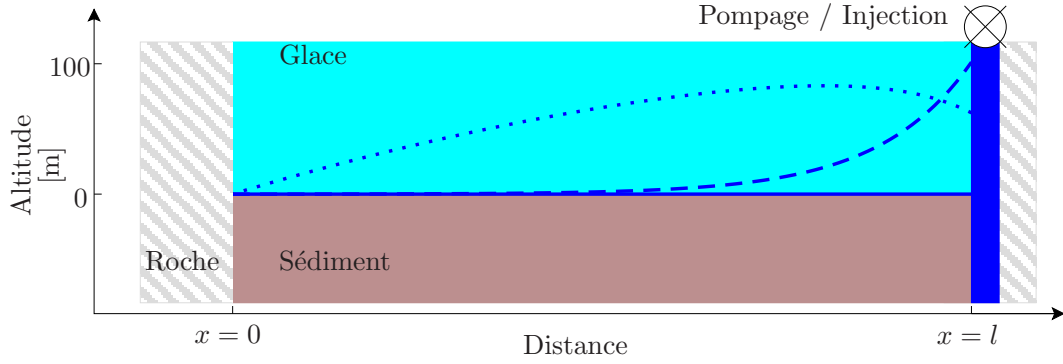


FIG. 4.9: Schéma de l'expérience utilisée pour vérifier la conservation du volume d'eau. La pompe en  $x = l$  sert à la fois à l'injection et au pompage de l'eau. Les massifs rocheux sont considérés imperméables. Les lignes bleues représentent la charge hydraulique à différents instants : état initial (trait plein), état transitoire à un instant donné pendant une phase d'injection (tireté) et un état transitoire à un instant donné pendant une phase de pompage (pointillé).

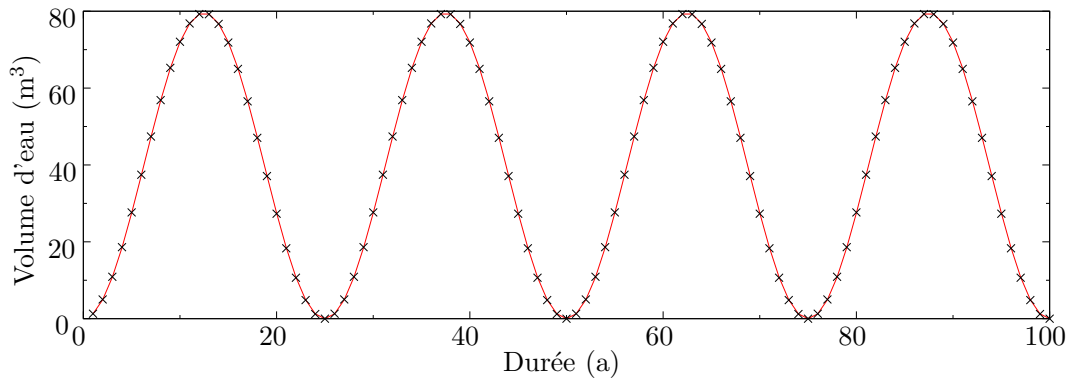


FIG. 4.10: Comparaison de l'évolution des volumes d'eau dans la nappe (croix noires) en fonction du volume injecté (trait rouge).

## 4.4 Application de l'équation de diffusion à un système de drainage à deux composantes

Le but final du modèle qui est présenté ici est de permettre le calcul de la loi de frottement basal. En vue de cet objectif, la pression effective à la base du glacier doit être calculée, ce qui demande de connaître précisément la répartition de la charge hydraulique dans la nappe d'eau sous-glaciaire. Les deux grandes familles de systèmes de drainage ont été présentées dans la Section 2.3.3. Nous allons décrire ici la méthode qui nous permet de rendre compte de ces deux types de drainage tout en gardant un modèle assez simple.



#### 4.4.1 Construction bicouche du modèle

Plusieurs facteurs ont motivé la création du modèle sous sa forme finale. Tout d'abord il faut bien voir que le but du modèle n'est pas le calcul des volumes d'eau à l'exutoire des glaciers mais bien le calcul des vitesses basales du glacier. Ainsi, certains paramètres qui entrent en jeu dans des modèles plus complexes d'hydrologie glaciaire comme ceux développés par Flowers et Clarke (2002); Arnold *et al.* (1998) ne seront pas pris en compte ici. Par exemple, on ne considérera pas les composantes du drainage supra- et intra-glaciaire. En effet, ces systèmes de drainage, bien qu'importants du point de vue de la cinétique du drainage, n'ont qu'un impact faible sur la pression d'eau basale. Ces simplifications permettent de réduire le nombre de paramètres et de processus physiques à prendre en compte et ainsi de minimiser les temps de calcul. Dans la suite on ne parlera donc plus que du drainage de l'eau à la base du glacier.

Comme on l'a vu dans la Partie 2.3.2, il existe un nombre important de systèmes de drainage sous-glaciaires dont l'existence est confirmée par des observations indirectes. La démarche choisie consiste à mettre en place un modèle reposant sur les deux grandes familles de systèmes de drainage définies dans la Partie 2.3.3. Dans la suite, on parlera d'un SDE à faible pression d'eau d'une part et d'un SDI à pression d'eau élevée d'autre part. Ce discernement entre SDE et SDI est fait à partir de la Figure 2.14 qui montre la relation entre les volumes d'eau évacués et la pression d'eau dans les différents systèmes de drainage. Ainsi, un système qui draine l'eau de façon inefficace entraîne l'établissement d'une pression d'eau importante à la base de la glace même si le volume d'eau à évacuer est faible. Un SDE, au contraire, permet de drainer rapidement de grandes quantités d'eau tout en gardant des pressions faibles.

La différence de pression entre ces deux systèmes entraîne la mise en place de flux d'eau entre eux comme on l'a déjà vu dans la Section 2.3.3. En effet, une pression d'eau trop importante dans un SDI entraîne la mise en place d'un SDE qui drainera le surplus d'eau et réduira donc la pression hydraulique. On voit donc bien ici que ces deux systèmes sont couplés et que la redistribution de l'eau entraînera des modifications de la charge hydraulique à la base du glacier. Une pression d'eau importante entraînera une pression effective faible et donc une diminution du frottement basal. Par contre, à partir d'un certain niveau de pression, l'activation d'un SDE entraînera la diminution de la charge hydraulique et donc une augmentation de la pression effective et par conséquent du frottement basal.

#### 4.4.2 Deux systèmes de drainage interconnectés

Comme présentée ci-dessus, la gestion de l'hydrologie sous-glaciaire nécessite la mise en place de deux systèmes de drainage interconnectés, l'un appartenant à la famille des SDE et l'autre à la famille des SDI. On doit alors faire le choix des systèmes de drainage qui seront utilisés dans chacune de ces deux familles. Les choix que j'ai fait ici sont dictés par des objectifs de simplicité.

J'utilise pour le SDI un système de drainage dans une couche de sédiments pour laquelle la répartition de l'eau est calculée par l'équation de diffusion (4.40) développée dans la Section 4.3.

Pour le SDE, le passage d'un système réel à un système modélisable est plus complexe. En effet, ces systèmes de drainage ne sont pas distribués sur la totalité de l'interface rocher/glace mais occupent seulement une faible surface du socle. Ainsi, il faut prendre en compte sur le socle un système de drainage dont la taille sera inférieure à la taille des mailles du modèle. Ce type de

réseau de drainage chenalisé se retrouve dans les aquifères karstiques pour lesquels des méthodes de traitement ont été développées pour modéliser les écoulements distribués et chenalisés (Teutsch et Sauter, 1991; Teutsch, 1993; Scanlon *et al.*, 2003). Dans notre modèle, la méthode appliquée revient à modéliser le système de drainage chenalisé par un système distribué. Cela revient à modéliser une couche de sédiment équivalente au système de drainage distribué comme présenté sur la Figure 4.11. Ainsi, on choisit pour cette couche équivalente, une paramétrisation des grandeurs physiques (conductivité, coefficient d'emménagement...) qui permet de rendre compte de l'écoulement que l'on observerait dans un système chenalisé.

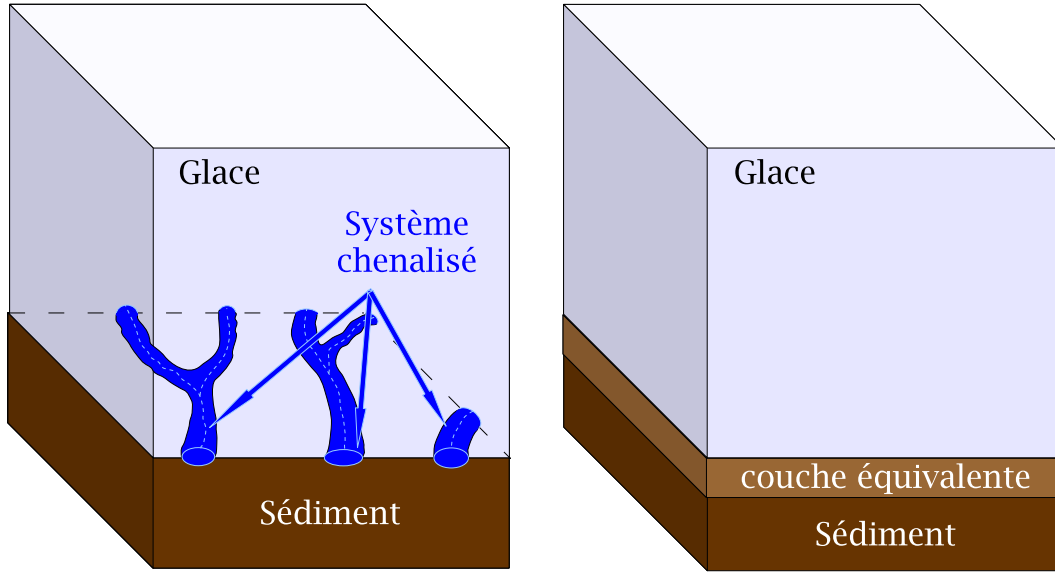


FIG. 4.11: Schémas représentant le système à modéliser (à gauche) et l'approche utilisée où le système chenalisé est remplacé par une couche continue équivalente (à droite).

L'intérêt de l'approche proposée est qu'elle permet d'utiliser la même équation de diffusion (4.40) pour le SDE et le SDI. Les seuls changements que l'on applique sur cette équation pour les deux systèmes de drainages concernent les paramètres spécifiques des systèmes de drainage et la définition des termes source et puits. On a alors pour le SDI :

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}_s \operatorname{grad} h_{ws}) = S_{sed} \frac{\partial h_{ws}}{\partial t} + Q_s, \quad (4.53)$$

et pour le SDE :

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}_c \operatorname{grad} h_{wc}) = S_c \frac{\partial h_{wc}}{\partial t} + Q_c. \quad (4.54)$$

On peut alors proposer un ordre de grandeur pour les paramètres nécessaires à la résolution des équations (4.53) et (4.54). Ces ordres de grandeur sont présentés dans le Tableau 4.3 et sur la Figure 4.12. Les expressions pour les différents flux sont détaillées dans la Partie 4.4.3.

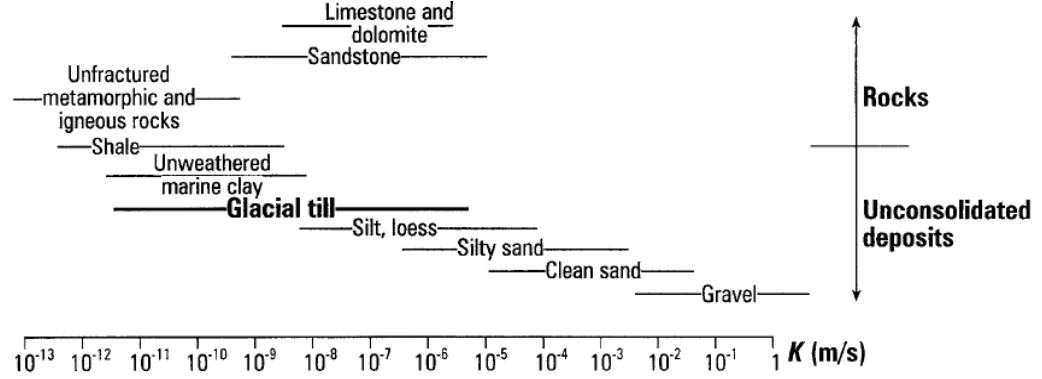


FIG. 4.12: Ordres de grandeur de la conductivité hydraulique pour différentes roches y compris les sédiments sous-glaciaires (Glacial till). On remarque que ces derniers présentent une plage de valeur très étalée. Figure issue de Freeze et Cherry (1979)

TAB. 4.3: Ordres de grandeur des valeurs caractéristiques pour les deux types de systèmes utilisés. Les ordres de grandeurs initiaux sont issus de Freeze et Cherry (1979)

param.	ordre de grandeur	commentaires
$T_s$	$5 \times 10^{-11}$ à $1 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$	En considérant une couche de sédiments de 10m
$T_c$	$1 \times 10^{-2}$ à $1 \text{ m s}^{-1}$	Basé sur des expériences de retour de traceurs
$S_{sed}$	$1 \times 10^{-6}$ à $1 \times 10^{-3}$	En considérant une couche de sédiments de 10m
$S_c$	$1 \times 10^{-7}$ à $1 \times 10^{-4}$	En considérant une couche drainante de 1m

Le Tableau 4.3 et la Figure 4.12 montrent bien la disparité de valeur en particulier pour les transmissivités du sédiment. On devra donc, lors de la modélisation, se baser sur les données existantes pour chaque application en vue de réduire l'incertitude sur les paramètres hydrologiques. Pour le glacier d'Arolla par exemple, des expériences menées par Hubbard *et al.* (1995) donnent pour la conductivité hydraulique  $K_s$  des valeurs comprises entre  $3 \times 10^{-4}$  et  $5 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$  ce qui permet de réduire l'étalement des valeurs de conductivité hydraulique.

#### 4.4.3 Transfert d'eau entre les deux systèmes

L'utilisation de deux équations identiques pour modéliser les SDE et SDI permet de les coupler simplement et de façon réaliste. On se base, pour coupler les deux systèmes, sur les transferts d'eau qui sont introduits dans les termes sources/puits des équations de diffusion (4.53) et (4.54). Les termes sources/puits  $Q_s$  et  $Q_c$  sont constitués d'un terme de recharge  $Q_{re}$  qui prend en compte l'entrée d'eau dans le système mais aussi d'un terme de transfert  $Q_t$  qui définit les volumes d'eau à transférer d'une couche à l'autre. Pour le flux d'entrée  $Q_{re}$ , on suppose qu'il est injecté uniquement dans le SDI. En effet la configuration de ce système, lorsqu'il est actif, fait qu'il occupe une portion du socle beaucoup plus importante que le SDE ce qui valide cette

hypothèse. Les termes sources/puits pour les deux couches s'écrivent donc :

$$Q_s = -Q_{re} + Q_t \quad \text{et} \quad Q_c = -Q_t. \quad (4.55)$$

Ces flux sont positifs pour un débit sortant. Ainsi le flux de transfert  $Q_t$  est exprimé comme un débit d'eau par unité de surface transitant du SDI vers le SDE.

Le flux de recharge  $Q_{re}$  est défini en fonction des apports à la base  $Q_{hg}$  et  $Q_{hf}$  dus respectivement au flux de chaleur géothermique  $Q_G$  et à l'énergie dissipée par le frottement :

$$Q_{hg} = \frac{Q_G}{\rho_i L_i} \quad \text{et} \quad Q_{hf} = \frac{\tau_b u_b}{\rho_i L_i}, \quad (4.56)$$

A ces sources basales il faut ajouter l'eau due à la fonte à la surface du glacier. On considère que cet apport est nul dans la zone d'accumulation et que l'eau produite dans cette zone est routée vers la zone d'ablation ou elle est transportée vers le socle. Ce terme d'apport est donc nul dans la zone d'accumulation et proportionnel au bilan de masse dans la zone d'ablation. Enfin, l'eau produite sur la zone d'accumulation est répartie sur une courte distance à l'aval de la ligne d'équilibre.

Les différentes composantes de ce flux de recharge peuvent donc varier dans le temps mais elles ne prennent pas en compte l'état du système de drainage. En effet, si le SDI est saturé, le terme  $Q_{re}$  sera toujours injecté dans ce système même si il est ensuite entièrement redistribué dans le SDE par l'intermédiaire du flux  $Q_t$ . Ce flux de transfert par contre est dépendant de l'état des deux systèmes entre lesquels il s'établit. La méthode utilisée pour calculer ce flux est présentée dans la suite. Les critères d'établissement du flux de transfert seront présentés avant de rentrer plus dans les détails de son calcul.

#### 4.4.3.1 Critère pour l'établissement du flux de transfert entre les deux systèmes de drainage

L'établissement d'un flux d'eau entre les SDE et SDI se fait en plusieurs étapes présentées sur la Figure 4.13.

On peut identifier quatre phases différentes dans l'établissement du flux de transfert entre les deux systèmes de drainage :

- (i) Lorsque le flux entrant  $Q_{re}$  est faible, alors le SDI a une capacité drainante suffisante pour évacuer la totalité de l'eau injectée (Figure 4.13(a)). Dans ce cas, le routage de l'eau est effectué uniquement dans le SDI avec une conductivité hydraulique faible et une charge hydraulique importante mais inférieure à la pression de flottaison (on a  $N > 0$ ). Le flux de transfert  $Q_t$  est alors nul et le SDE est inactif.
- (ii) Si le flux d'eau basale augmente, alors la charge hydraulique dans le système de drainage va augmenter progressivement jusqu'à atteindre localement la limite de flottaison (Figure 4.13(b)). Le SDE devient alors actif dans la zone pour laquelle la pression effective est nulle. Avec cette activation se met en place un flux d'eau  $Q_t$  entre les deux systèmes de drainage. Le volume d'eau qui est transféré d'un système à l'autre correspond alors au volume d'eau en excès par rapport à la limite de flottaison (Figure 4.14). L'eau transite du SDI vers le SDE avant d'être réinjectée dans le SDI au point où le SDE n'est plus actif.

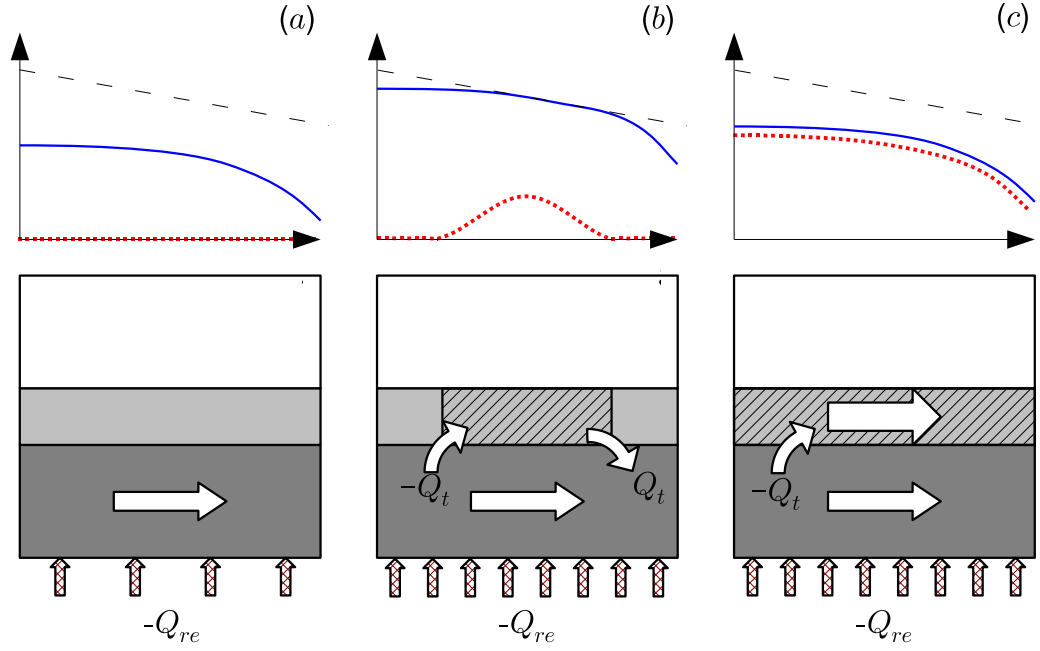


FIG. 4.13: Description du couplage entre les deux systèmes hydrauliques. Les courbes présentent la charge hydraulique dans le SDI (trait bleu), dans le SDE (points rouges) et la limite de flottaison  $N = 0$  (tirets noirs). Les schémas montrent comment s'établissent les flux d'eau quand (a) seul le SDI est actif, (b) le SDE est actif (partie hachuré) mais non connecté et (c) le SDE est actif et connecté. Les critères sur l'activité et la connexion du SDE sont présentés dans le texte, le flux  $Q_t$  est exprimé en fonction du SDE.

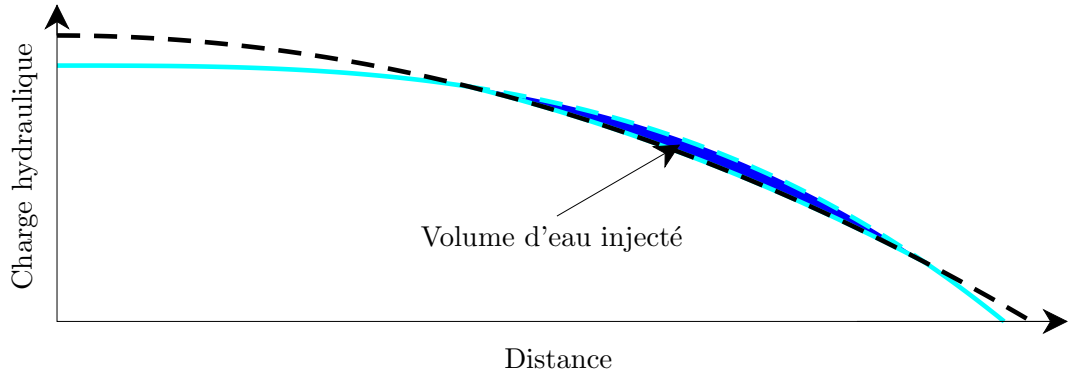


FIG. 4.14: Visualisation du volume d'eau injecté dans le SDE. Le tireté bleu correspond à la charge hydraulique calculée, le tireté noir à la limite de flottaison et le trait plein bleu à la charge hydraulique dans le SDI après le transfert d'eau.

- (iii) Le fait de réinjecter l'eau dans le SDI entraîne une surcharge de ce dernier à l'aval (au sens des charges hydrauliques) de la zone où les deux systèmes sont actifs. Cette surcharge

entraîne alors une augmentation de la charge hydraulique et donc une propagation de l'activation du SDE vers l'aval.

- (iv) Le SDE, lorsqu'il est actif, permet de drainer une quantité d'eau plus importante mais ce volume est ensuite réinjecté dans le SDI. Pour que le SDE soit vraiment fonctionnel il doit être connecté à l'une de ses extrémités à un réservoir infini dont la charge hydraulique est constante. Pour les glaciers, les différents réservoirs infinis que l'on peut citer sont : le front d'un glacier où le torrent issu du glacier fixe la charge hydraulique, l'océan pour les glaciers côtiers où la charge hydraulique correspond au niveau de la mer et les lacs sous-glaciaires d'un volume suffisant pour que l'apport d'eau dû au glacier ne fasse pas varier de manière significative la charge hydraulique. Une fois que le SDE actif est relié à l'un de ces exutoires, on peut dire qu'il est ouvert. Une de ses extrémités est donc reliée à un point dont la charge hydraulique est fixée et inférieure à la charge dans le SDI. On aura alors un terme supplémentaire dans l'expression du flux  $Q_t$  directement lié à la différence de charge entre les deux systèmes. La mise en place de ce drainage va entraîner une diminution rapide de la charge hydraulique dans le SDI comme illustré sur la Figure 4.13(c).

#### 4.4.3.2 Calcul du volume d'eau mis en jeu dans le transfert entre couches

Comme on l'a vu précédemment, le flux de transfert entre les deux couches  $Q_t$  dépend de deux mécanismes. Le premier est directement implémenté dans la méthode de résolution de l'équation de diffusion alors que le deuxième met en jeu une équation de transfert entre les deux couches.

- (i) Lorsque le SDE est actif, seul le volume d'eau qui entraîne une surcharge du SDI est pris en compte. Le volume d'eau entrant en jeu dans ce transfert est alors calculé par un système itératif. Une comparaison est faite entre la charge hydraulique et une limite supérieure. Si cette limite est atteinte, l'excédant d'eau est injecté dans le SDE et la charge hydraulique du SDI est corrigée. La gestion de ce surplus d'eau se fait grâce à l'application d'une condition limite de Dirichlet ce qui permet de fixer la charge hydraulique à sa limite supérieure et de calculer l'excédent d'eau ainsi libéré. Cette méthode est expliquée plus en détails dans l'Annexe C.
- (ii) Lorsque le SDE est ouvert sur l'extérieur, un deuxième terme vient alors s'ajouter au premier. Le terme de transfert alors mis en jeu dépend des différences de charge hydraulique entre les deux systèmes. En effet, l'eau va migrer du système présentant la plus haute charge hydraulique vers le système le moins chargé. Étant donné le sens qui a été fixé pour le transfert d'eau, on peut écrire l'équation du flux comme suit :

$$Q_t = \varphi \frac{(h_c - h_{sed})S_j}{\gamma}, \quad (4.57)$$

ou  $h_c$  et  $h_{sed}$  sont respectivement les charges hydrauliques dans les SDE et SDI et  $S_j$  est le coefficient d'emmagasinement du SDI ( $j = sed$ ) ou du SDE ( $j = c$ ). La multiplication par le coefficient d'emmagasinement est nécessaire pour convertir les hauteurs d'eau en volume et on utilisera donc le coefficient de la couche pour laquelle le débit est sortant. Les coefficients  $\gamma$  et  $\varphi$  enfin sont respectivement un temps de transfert représentant le temps mis par l'eau pour passer d'un système de drainage à l'autre et un terme contrôlant le couplage entre les deux systèmes.

#### 4.4.4 Conservation du volume pour le système couplé

Le couplage réalisé entre les deux systèmes de drainage ne permet pas d'établir des solutions analytiques pour la vérification de son implémentation comme il a été fait dans la Section 4.3 pour vérifier l'implémentation de l'équation de diffusion. Toutefois on peut vérifier la conservation du volume. On met en place pour cela la même expérience que celle qui a été réalisée pour la vérification de l'implémentation de l'équation de diffusion (Section 4.3.4) mais en appliquant une limite supérieure à la charge hydraulique du SDI. Cette limite est ici fixée arbitrairement à dix mètres sans prendre en compte l'épaisseur de glace et donc la limite de flottaison.

A partir de cette nouvelle expérience, on vérifie donc que l'introduction du terme de transfert entre les deux systèmes de drainage n'introduit pas de biais dans la conservation du volume d'eau. Les résultats de cette simulation sont présentés sur la Figure 4.15. On observe sur cette figure l'évolution du volume d'eau dans les deux systèmes de drainage ainsi que la somme de ces volumes qui est bien égale au volume calculé à partir de l'intégrale de l'équation 4.52.

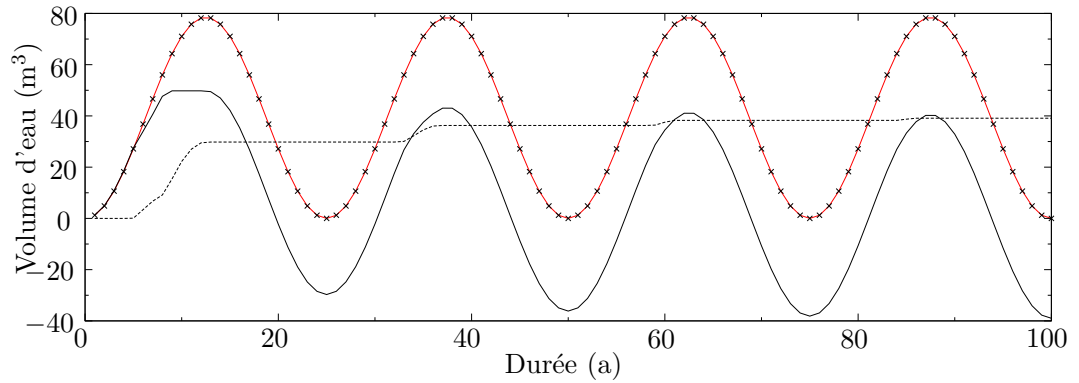


FIG. 4.15: Évolution des volumes d'eau en fonction du temps pour le SDI (trait noir plein) le SDE (tireté noir) ainsi que la somme des volumes dans les deux systèmes (croix noires) superposée au volume injecté (trait rouge).

### 4.5 Conclusion sur la structure du modèle

A partir d'une équation de diffusion en milieu poreux, on a donc développé un modèle hydrologique prenant en compte deux systèmes de drainages. Le SDI est représenté par une couche de sédiments présentant une conductivité hydraulique faible et un coefficient d'emménagement important. L'approximation majeure du modèle consiste à modéliser le SDE comme une couche de sédiments équivalente au système chenalisé. Cette approche du double continuum a été utilisée avec succès pour modéliser l'écoulement dans les karsts dont on ne peut connaître précisément la conformation (Teutsch et Sauter, 1991).

La construction bicouche du modèle ainsi que la méthode de pénalisation utilisée pour contraindre la charge hydraulique maximale du sédiment demande de mettre en place un modèle à la structure complexe qui est présenté sur la Figure 4.16.

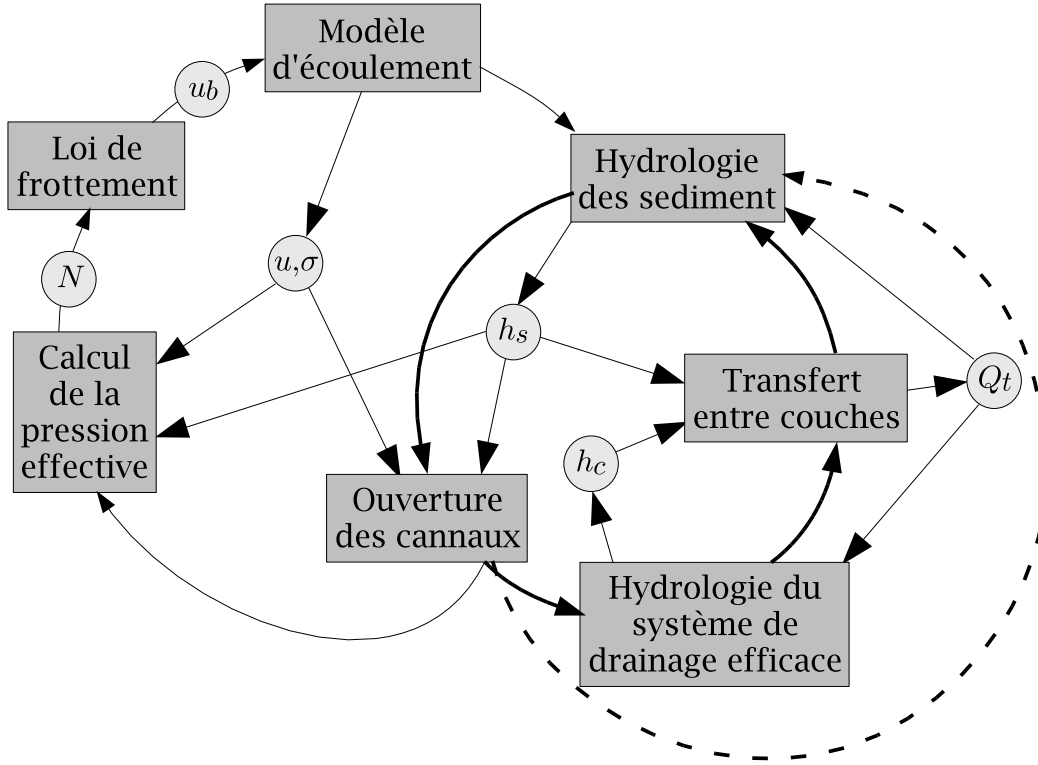


FIG. 4.16: Schéma présentant le fonctionnement du modèle d'hydrologie et son couplage avec le modèle de dynamique glaciaire. Les rectangles représentent des étapes de calcul alors que les variables calculées sont inscrites dans des cercles. Les détails du fonctionnement sont donnés dans le texte.

On voit bien sur ce schéma le couplage entre l'hydrologie et la dynamique glaciaire qui se fait par l'intermédiaire de la pression effective  $N$  et du champ de contrainte  $\sigma$  qui contrôle la limite supérieure de la charge hydraulique du SDI et donc l'ouverture du SDE. La partie droite du schéma (en traits gras) présente le modèle hydrologique. Pour ce dernier, on observe deux possibilités :

- (i) Si la limite supérieure du SDI n'est pas atteinte alors le SDE n'est pas activé et le cheminement du modèle suit le tireté qui représente à la fois le pas de temps hydrologique plus court et les itérations nécessaires au calcul de la limite supérieure du SDI.
- (ii) Si la limite supérieure du SDI est dépassée, alors le SDE est activé et les différents calculs se font en suivant la flèche en trait plein. De même, cette flèche présente à la fois le pas de temps hydrologique et les itérations du système non linéaire dans lequel est maintenant inclus le calcul du volume d'eau transféré.

Dans la moitié gauche du schéma est présentée la portion du modèle qui est directement liée à la dynamique glaciaire avec le calcul de la pression effective et, à partir de cette dernière, de la vitesse de glissement basale qui constitue une des conditions limites du modèle d'écoulement glaciaire.



On obtient ainsi un modèle hydro-glaciologique couplé dont le but est d'expliquer des phénomènes d'accélération glaciaires qui pourraient être dus à des variations de charge hydraulique. En vue de valider l'approche de double continuum utilisée par le modèle hydrologique, des expériences ont été menées pour valider les résultats du modèle. Ces expériences sont présentées dans le chapitre suivant.

## Chapitre 5

# Application à un cas 2D

Les expériences mises en place dans la Section 4.3 ont permis de vérifier que l'implémentation de l'équation de diffusion dans Elmer était correcte. On a par contre peu de possibilités pour valider les résultats du modèle couplé. Pour effectuer sa validation on s'attache donc à réaliser la modélisation d'un cas réel. On effectuera avant cela des tests de sensibilité sur différents paramètres hydrologiques mis en jeu dans le modèle.

### 5.1 Présentation de l'expérience

Le but de la simulation que je présente ici est d'une part de réaliser une étude de sensibilité du modèle aux paramètres hydrologiques et d'autre part de confronter le modèle à un cas réel en vue de confirmer la cohérence et l'efficacité du schéma de couplage hydro-glaciologique implémenté dans Elmer. On cherche pour cela un phénomène glaciologique pour lequel la dynamique soit fortement dépendante de l'hydrologie sous-glaciaire. De plus, pour que l'expérience de modélisation permette une validation du modèle, on doit être en mesure de comparer les vitesses modélisées aux mesures de terrain. Les phénomènes de jökulhlaup (ou vidange de lac glaciaire) réunissent toutes ces caractéristiques.

#### 5.1.1 Cadre général de l'expérience

Les jökulhlaups sont des phénomènes épisodiques qui mettent en jeu le drainage d'un lac sub ou supra-glaciaire (e.g. Björnsson, 1998). Ces phénomènes peuvent être réguliers, par exemple dans le cas du lac du Görner (Suisse) qui se vidange chaque année ou du Merzbacher (Kyrgyzstan) tous les huit mois environ (Huss *et al.*, 2007; Ng et Liu, 2009). Ces vidanges épisodiques sont dues au remplissage naturel d'un lac par l'eau de fonte. En effet, à partir d'un certain volume, la pression d'eau devient trop forte et le lac se vide. A ces épisodes réguliers peuvent s'ajouter des drainages beaucoup moins prévisibles. Ils sont en général le fait d'éruptions volcaniques sous-glaciaires qui entraînent la production d'un volume d'eau important et donc la vidange prématurée du lac. Le lac du Grímsvötn (Islande) est un exemple flagrant de ces deux types de jökulhlaups. Sur la Figure 5.1 on peut discerner ces deux comportements dans les variations de l'altitude de la glace flottante à l'aplomb du lac et qui reproduit les variations d'altitude de

la surface du lac. On observe en effet des variations périodiques de l'ordre de 5 ans avec des événements intermittents caractérisés par des augmentations d'altitude plus rapides et dues à des éruptions sous-glaciaires.

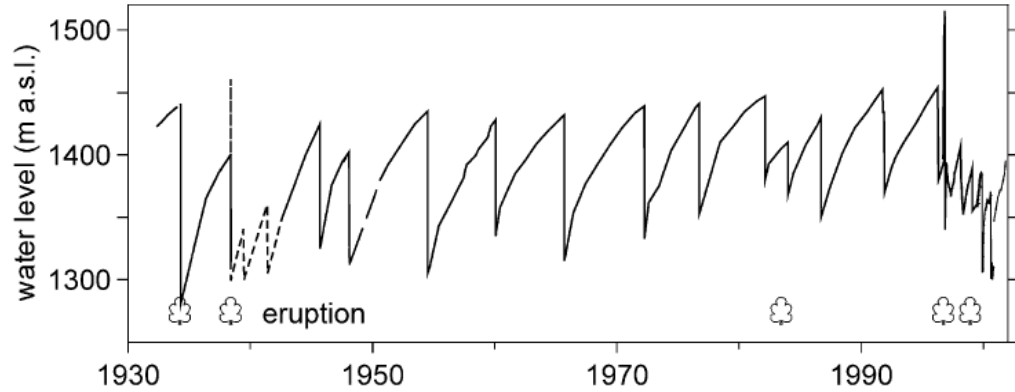


FIG. 5.1: Évolution du niveau du lac du Grímsvötn au cours du temps, les portions verticales entre un point haut et un point bas correspondent à une diminution rapide du niveau et donc à un jökulhlaup. L'avant dernière éruption indiquée, datant de novembre 1996, est celle qui nous intéressera pas la suite. Figure issue de Björnsson (2002)

De nombreuses études menées sur les jökulhlaups permettent de disposer de données en quantités importantes. Un grand nombre de ces études ne s'intéressent qu'à la partie hydrologique de l'évènement et se basent sur les jökulhlaups pour essayer de décrire les systèmes de drainage à la base des glaciers (Nye, 1976; Björnsson, 1998, 2002; Fowler, 1999; Flowers *et al.*, 2003, 2004; Werder *et al.*, 2009; Werder et Funk, 2009; Ng et Liu, 2009). Ces études n'ont pas le même objectif que notre modélisation qui vise à calculer les vitesses de glissement quitte à simplifier le modèle hydrologique. Par contre, les études citées plus haut permettent d'avoir une bonne connaissance des mécanismes mis en jeu lors du jökulhlaup et plus particulièrement des débits et des volumes d'eau drainés. De plus, certaines observations récentes ont permis d'avoir une meilleure connaissance du lien entre vitesses de surface et volume d'eau à la base des glaciers. Ces dernières nous permettent de connaître les vitesses en surface durant les épisodes de jökulhlaups ce qui fournit des données intéressantes pour une comparaison avec les résultats issus du modèle (Björnsson *et al.*, 2001; Gudmundsson *et al.*, 2002; Anderson *et al.*, 2005; Magnússon *et al.*, 2007, 2010; Bartholomäus *et al.*, 2008).

La calotte du Vatnajökull (Islande) est l'endroit pour lequel on dispose du plus grand nombre de données sur les jökulhlaups. J'ai donc choisi pour cette étude de travailler sur cette calotte et en particulier sur le glacier du Skeiðarárjökull. La localisation de ce glacier ainsi que celle de la ligne d'écoulement choisie pour la modélisation sont présentées sur la Figure 5.2.

L'évènement modélisé est un jökulhlaup survenu en Octobre 1996 après une éruption importante qui a entraîné le débordement du lac du Grímsvötn. Ce jökulhlaup est le plus important de la période récente sur ce glacier autant par le volume total d'eau drainée que par le débit de pointe observé. L'importance de ce jökulhlaup sur un glacier au comportement bien suivi permet d'avoir un grand nombre de données (Björnsson, 2002; Gudmundsson *et al.*, 2002). Le glacier

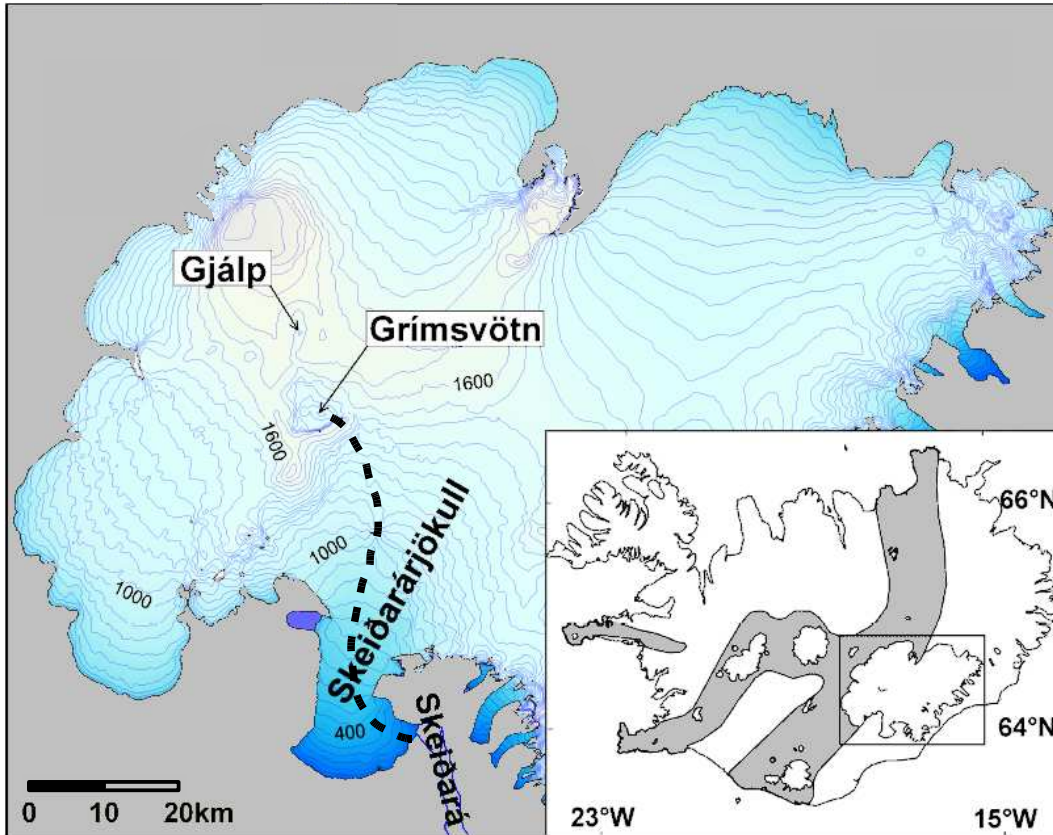


FIG. 5.2: Carte de la calotte du Vatnajökull, la ligne pointillée correspond à la ligne d'écoulement modélisée. L'insert présente une vue générale de l'Islande avec les zones à forte activité volcanique en gris. Figure adaptée de Magnússon *et al.* (2010).

a aussi été survolé par les satellites ERS1 et ERS2 durant environ 4 ans à partir de 1995. Les instruments présents sur ces satellites permettent l'acquisition d'images radar qui rendent possible le calcul des vitesses de surface par interférométrie (InSAR) (Hansen, 2001). Ces campagnes spatiales ont donc donné lieu au calcul des champs de vitesses de surface du glacier à différentes dates comme présenté par Magnússon *et al.* (2010).

Le but de notre modélisation étant plus de confirmer les résultats du modèle que de modéliser fidèlement l'impact du jökulhlaup sur la dynamique du Skeiðarárjökull, j'ai choisi d'utiliser une géométrie synthétique plutôt que la géométrie réelle. Cette approximation de la géométrie permet de simplifier la réponse du modèle en s'affranchissant des variations de dynamique à petite échelle engendrées par la topographie. On obtient alors des champs de vitesses lissés et donc plus facilement interprétables. Les détails sur la géométrie sont donnés dans la Section 5.1.2. La chronologie précise de l'expérience est, quant à elle, donnée dans la Section 5.1.3. On garde pour cette dernière la même philosophie que pour la géométrie, on utilisera donc un forçage réaliste mais simplifié.

### 5.1.2 Géométrie du problème

Le but de cette étude est plus de valider le modèle sur un cas concret que de modéliser un phénomène avec précision. Au vu de cet objectif, la modélisation se fera sur une ligne d'écoulement plutôt que sur une géométrie tridimensionnelle. Ce passage de trois à deux dimensions permet de réduire les temps de calcul en limitant la taille du maillage utilisé. De plus on utilisera une géométrie simplifiée par rapport à la géométrie réelle présentée par Björnsson (2002). La géométrie du lit rocheux utilisée est décrite de la façon suivante :

$$z_b(x) = \text{Min} \left( 1240, 1490 - \frac{x}{20} + 380 \left( \frac{x}{4 \times 10^4} \right)^4 - \exp \left( \frac{x - 4.5 \times 10^4}{2700} \right) \right) \quad (5.1)$$

et pour la surface :

$$z_t(x) = \text{Min} \left( 1550, 1685 - \frac{x}{37} - 80 \sin \left( \frac{x - 5 \times 10^3}{1 \times 10^4} \right) \right) \quad (5.2)$$

où les altitudes  $z_i$ , ( $i = b, t$ ) et la distance au dôme  $x$  sont données en mètres. Ces deux expressions sont tracées sur la Figure 5.3.

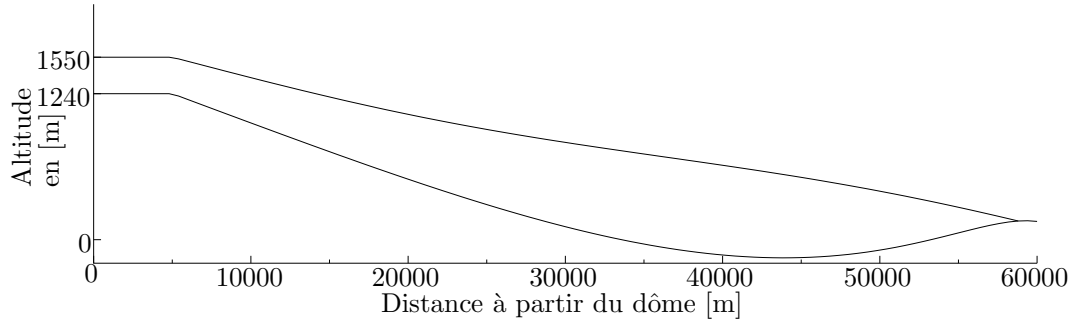


FIG. 5.3: Topographie synthétique utilisée pour les expériences tracée à partir des équations (5.1) et (5.2).

La géométrie simplifiée présentée sur la Figure 5.3 se base sur la géométrie réelle présentée par Björnsson (2002). Une comparaison entre géométries synthétique et réelle est présentée sur la Figure 5.4.

### 5.1.3 Déroulement du jökulhlaup et forçage imposé au modèle

#### 5.1.3.1 Déroulement du jökulhlaup

Le Skeiðarárjökull est un glacier généralement soumis aux jökulhlaups du lac du Grímsvötn avec des intervalles entre crues de 2 à 10 ans (Björnsson, 2002, et Figure 5.1). Une étude de ces jökulhlaups réguliers a été menée par Fowler (1999) en se basant sur la théorie de Nye (1976). Fowler (1999) se base, pour établir sa théorie, sur l'existence d'un barrage qui ferme le lac du

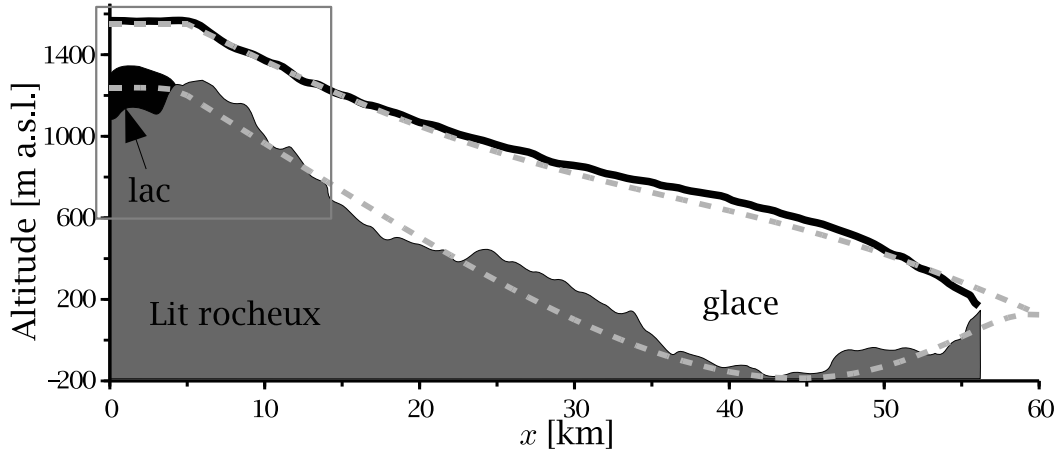


FIG. 5.4: Comparaison entre la géométrie synthétique utilisée dans le modèle (tireté gris) et la topographie réelle présentée par Björnsson (2002). La ligne d'écoulement s'étend du lac du Grímsvötn jusqu'au Skeiðarársandur comme présenté sur la Figure 5.2. Le cadre gris correspond à l'emprise de la Figure 5.5.

Grímsvötn. Il calcule pour cela un potentiel hydraulique  $z_i$  tel que :

$$z_i = h_w + \frac{p_i^0 - p_i}{\rho_w g}, \quad (5.3)$$

où  $p_i = \rho_i g h$  est la pression glaciostatique en tous points et  $p_i^0$  la pression glaciostatique au bord du lac. Le maximum de la différence entre l'altitude du socle  $z_b$  et ce potentiel  $z_i$  donne alors la position du barrage comme indiqué sur la Figure 5.5.

A l'aide de ce modèle, Fowler (1999) donne une estimation de la période de retour des jökulhlaups. Toutefois, il ne peut prendre en compte les événements non prévisibles dus aux éruptions volcaniques que l'on observe sur la Figure 5.1. L'évènement de novembre 1996 que je me propose de modéliser est issu de l'une de ces éruptions. Ce jökulhlaup, dû à une éruption volcanique, est beaucoup plus violent que ceux qui arrivent périodiquement et qui sont dus à un remplissage moins rapide du lac par l'eau de fonte. Dans le cas de l'évènement de Novembre 1996, on est face à un afflux massif et rapide d'eau qui a entraîné le soulèvement du barrage de glace qui ferme habituellement le lac du Grímsvötn. Le soulèvement de ce barrage a généré un afflux massif d'eau à l'aval du lac avec un débit maximal de  $40\,000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . Le drainage a commencé le 4 Novembre et s'est poursuivi durant 40 heures pour évacuer un volume total d'eau de  $3.2 \text{ km}^3$ . Une description détaillée de l'éruption d'octobre 1996 ayant entraîné le jökulhlaup peut être trouvée dans Gudmundsson *et al.* (1997). La comparaison des différents hydrographes de la Figure 5.6(b) montre bien l'importance de ce jökulhlaup tant au niveau du débit observé que de la durée assez courte de l'évènement.

### 5.1.3.2 Description du forçage imposé

Le forçage mis en place peut être décrit en deux phases distinctes :

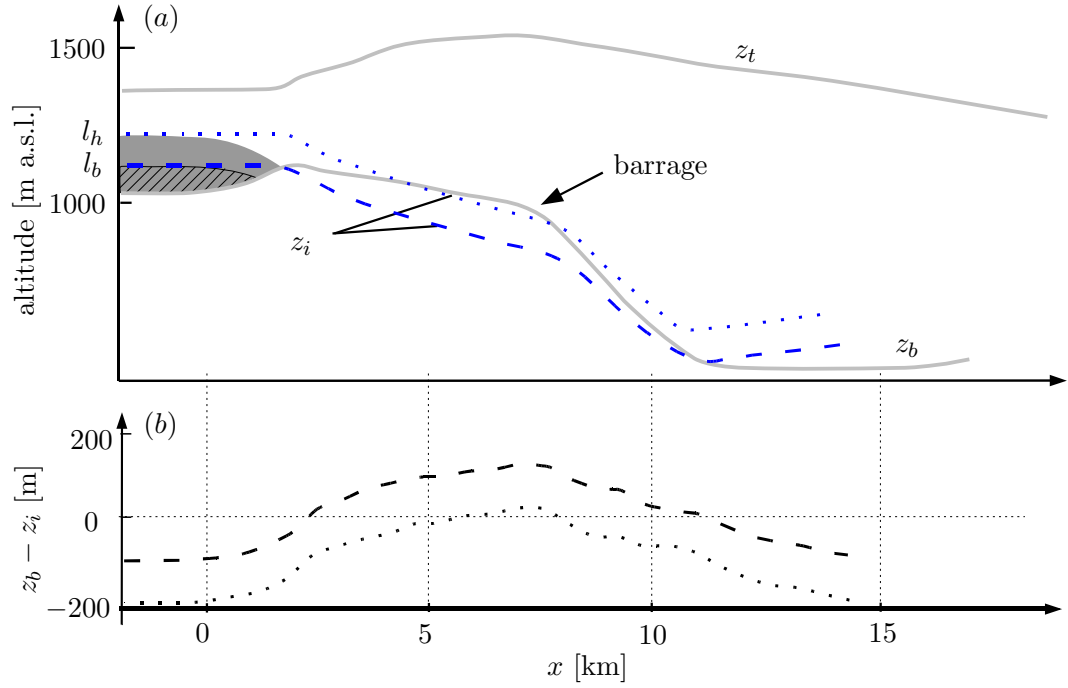


FIG. 5.5: Schéma présentant la topographie à proximité du lac pour le socle  $z_b$  et la surface  $z_t$  (traits gris épais) ainsi que les potentiels hydrauliques  $z_i$  pour un niveau haut  $l_h$  et un niveau bas  $l_b$  du lac représentés respectivement par les zones grisée et grisée hachurée (a). La différence  $z_b - z_i$  qui met en évidence le barrage de glace est tracée pour le niveau haut du lac (pointillé) et pour le niveau bas (tireté) (b). Figure adaptée de Fowler (1999).

- (i) La perturbation : elle est basée sur les données que l'on possède concernant le volume d'eau drainé durant le jökulhlaup de Novembre 1996. Je me suis basé sur l'hydrographe présenté par Björnsson (2002) qui a été mesurée par altimétrie. Cette mesure est permise par la connaissance de la bathymétrie du Grímsvötn ce qui autorise le calcul du volume d'eau si l'on dispose d'informations sur l'altitude de la surface du lac. Ces informations quant à l'altitude sont mesurées à la surface du glacier où la glace flotte sur le lac. Les variations d'altitude de la surface du lac suivies par celle de la glace permettent alors de définir la variation du stock d'eau dans le lac du Grímsvötn. Durant le jökulhlaup de novembre 1996 la variation d'altitude de la glace à la surface du lac était de 175 m permettant de calculer un volume d'eau libéré de  $3.2 \text{ km}^3$ . Le forçage du modèle est effectué en prescrivant un flux d'eau défini par rapport à cet hydrographe comme présenté sur la Figure 5.6.

Étant donné que l'on travaille avec un modèle à deux dimensions selon une ligne d'écoulement, il faut prendre en compte le nombre de chenaux qui s'ouvrent sous le glacier pour définir le volume d'eau à injecter durant le forçage. Je suppose en effet que la ligne de courant choisie se situe à l'aplomb d'un chenal et que tous les chenaux drainent le même volume d'eau. Ainsi, le volume donné par l'hydrographe doit être divisé par le nombre de chenaux supposés pour obtenir le volume du forçage à mettre en place. Björnsson (1998)

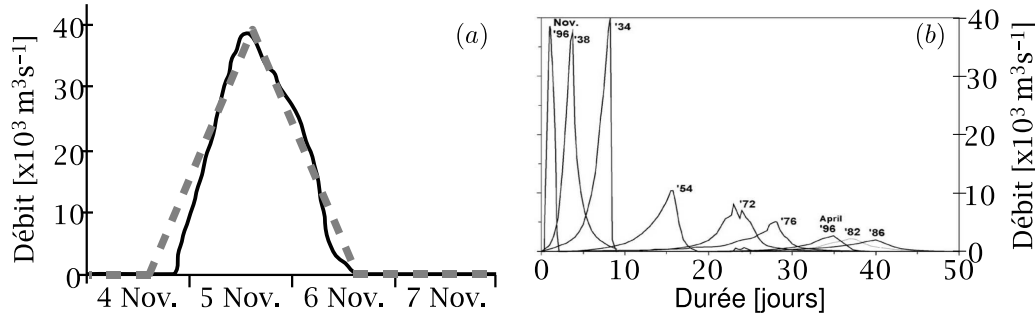


FIG. 5.6: (a) hydrographe du jökulhlaup de Novembre 1996 (trait plein) et le forçage appliqué avant sa répartition dans une dizaine de tunnels. (b) comparaison d'hydrographes mesurés durant différents jökulhlaups du Grímsvötn. On remarque bien la différence entre les jökulhlaups périodiques et ceux dus à des éruptions (1934, 1938, 1996 cf. Figure 5.1). Figures adaptées de Björnsson (2002).

estime qu'il se forme de 10 à 15 chenaux durant les épisodes de drainage important, on utilisera donc cette valeur pour calculer le volume d'eau à injecter en entrée du modèle.

- (ii) La relaxation : les données InSAR dont je dispose se situent plutôt dans la période suivant le jökulhlaup. Les données existantes pour la période précédent le jökulhlaup permettent aussi de se faire une bonne idée de la vitesse du glacier avant la perturbation. Par contre, nous ne possédons que des estimations des vitesses durant le jökulhlaup. J'ai donc effectué une simulation qui s'étendait longtemps après le jökulhlaup pour avoir un maximum de points de comparaison entre données et modèle.

## 5.2 Paramètres du modèle spécifiques à l'expérience

Les conditions aux limites, ainsi que les pas de temps et les paramètres physiques du modèle sont spécifiques à chaque problème traité. Dans cette section, on décrira tout d'abord les conditions aux limites qui ont été appliquées avant de présenter les valeurs des différents paramètres physiques nécessaires à la modélisation.

### 5.2.1 Conditions aux limites

On décrira dans cette partie les conditions aux limites qui seront utilisées lors de notre modélisation en commençant par les conditions nécessaires au fonctionnement du modèle d'écoulement glaciaire.

#### 5.2.1.1 Pour le modèle d'écoulement glaciaire

La limite amont du modèle ( $x = 0$  sur la Figure 5.4) est constituée par un dôme. Cela signifie qu'en ce point, la glace s'écoule de manière symétrique par rapport à l'axe  $x = 0$ . On fixera donc pour cette limite une condition de symétrie qui revient à imposer un flux de glace nul à travers la limite amont du modèle.



La limite supérieure est traitée comme une surface libre. Ceci revient à faire l'hypothèse que la pression atmosphérique a un rôle négligeable sur la dynamique glaciaire. Sur cette surface libre, on doit, par contre, prescrire un terme de bilan de masse représentant les précipitations neigeuses (quand il est positif) ou la fonte (quand il est négatif). Malgré son étendue, la calotte du Vatnajökull est bien étudiée par le Science Institute de l'université d'Islande. Ce suivi régulier permet de relever les bilans de masse en différents points de la calotte ce qui donne une idée assez précise de son bilan de masse global. Des expériences ont été réalisées en utilisant le bilan de masse paramétrisé par Adalgeirsdóttir *et al.* (2003). Toutefois on ne se basera pas, par la suite, sur ce bilan de masse car il engendrent des épaisseurs de glaces trop importantes par rapport aux observations. En effet, la paramétrisation de Adalgeirsdóttir *et al.* (2003) est développée pour toute la calotte et son application à notre ligne d'écoulement entraîne des bilans fortement négatifs dus au passage de trois à deux dimension. On choisit donc une paramétrisation du bilan de masse qui permette de maintenir une géométrie en accord avec la géométrie réelle :

$$b(x) = 3.6 - (1.2 \times 10^4 x) \quad (5.4)$$

Cette simplification du bilan de masse à une fonction linéaire peut paraître simpliste mais elle permet de conserver la géométrie glaciaire. Le choix de cette répartition du bilan de masse repose aussi sur le fait que l'on cherche ici à montrer la réponse du glacier à une perturbation extérieure et pas au forçage climatique. En effet, la répartition du bilan de masse a une influence importante sur la géométrie glaciaire et donc le champ de vitesse d'un état stationnaire. Par contre, si cette répartition reste constante dans le temps, elle n'aura pas d'influence sur des variations à court terme du champ de vitesse.

La limite aval étant constituée par le front du glacier, elle est aussi traitée comme une surface libre.

La loi de frottement quant à elle intervient dans la condition à la limite basale du glacier. On utilisera ici la loi décrite par l'équation (2.20) présentée dans la Section 2.2.3. La présence de la pression effective  $N$  dans cette loi permet en effet de coupler le modèle d'écoulement glaciaire au modèle hydrologique.

### 5.2.1.2 Pour le modèle d'hydrologie

Dans cette expérience, on considérera comme conditions aux limites, les extrémités amont et aval mais aussi le terme de recharge de l'aquifère qui sera fixé et non calculé.

La limite aval pour le système hydrologique est constituée par le front du glacier où un torrent va se former à partir de l'eau libérée par l'aquifère. Ce torrent forme alors un réservoir infini dont la charge hydraulique est constante. On appliquera donc à cette limite aval une charge hydraulique fixée dont la valeur sera la même que celle de la surface du torrent qui sera approximée par la côte du terrain naturel.

La limite amont correspond à l'entrée de l'eau dans le modèle, c'est cette limite qui nous permettra d'exercer un forçage sur le modèle hydrologique. La condition limite choisie ici est une condition de flux. En effet, même lorsque le barrage de glace est en place, il laisse filtrer une certaine quantité d'eau qui s'écoule sous le glacier à l'aval du lac. Ainsi cette condition limite en flux permet de bien reproduire la réalité en laissant un flux faible en période «normale» et en imposant un flux important durant les épisodes de jökulhlaups.

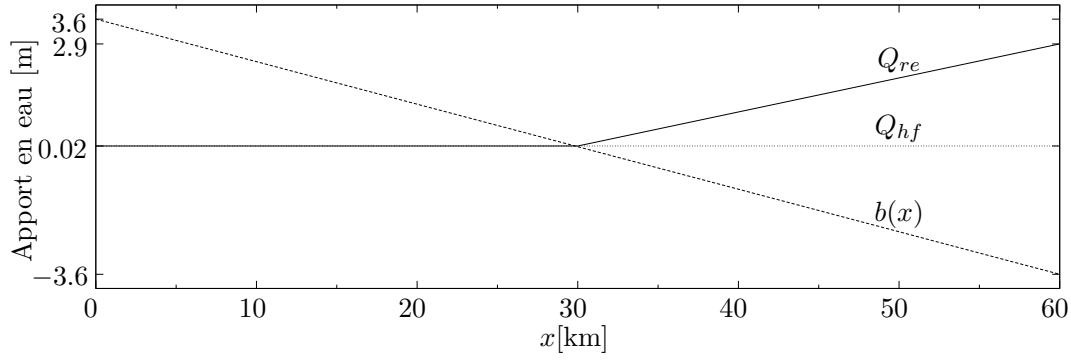


FIG. 5.7: Valeur du flux de recharge  $Q_{re}$  en fonction de la distance au dôme  $x$  ainsi que les différents termes permettant son calcul  $Q_{hf}$  et  $b(x)$ .

Enfin, le terme de recharge à la base est défini en fonction du flux d'eau par unité de surface  $Q_{hg}$  dû au flux géothermique calculé par l'intermédiaire de l'équation (2.22) et de la fonction de bilan (5.4) quand elle est négative.

$$Q_{re}(x) = Q_{hf} - \text{Min}(0, 0.8 \times b(x)) , \quad (5.5)$$

Le flux géothermique  $Q_G$  adopté pour calculer le volume d'eau produit est de  $0.2 \text{ W m}^{-2}$ . Cette valeur moyenne est issue de l'étude de Flovenz et Saemundsson (1993). Le coefficient 0.8 présent devant le bilan de masse permet de prendre en compte un volume d'eau qui ruissellerait en surface ou à l'intérieur du glacier plutôt que de se retrouver à l'interface entre socle et glacier. Cette valeur de «capture» est typique des glaciers tempérés comme l'a montré Stenborg (1973). La Figure 5.7 synthétise les différents termes qui entrent en jeu dans l'équation (5.5).

### 5.2.2 Procédure d'initialisation et gestion des pas de temps

Pour mettre en place des simulations pour lesquelles les résultats observés soient uniquement dus à la perturbation que l'on applique, on doit s'assurer de partir d'un état initial qui soit à l'équilibre. Dans le cas que j'ai traité, cette procédure d'initialisation a été réalisée en trois étapes pour s'assurer que toutes les composantes du modèle étaient bien à l'équilibre.

(i) Stabilisation de la surface du glacier et de sa dynamique :

Avec la géométrie que j'ai défini dans les équations (5.1) et (5.2) ainsi que le bilan de masse présenté dans l'équation (5.4), le modèle glaciologique est laissé libre de retrouver un état d'équilibre. Cette stabilisation est effectuée en n'utilisant que le modèle glaciologique et en fixant une pression d'eau nulle à la base du glacier, ce qui entraîne des vitesses de glissement basal faibles. La stabilisation s'effectue sur une période de 1000 ans avec des pas de temps de un an.

(ii) Stabilisation de la charge hydraulique :

Comme je ne disposais pas de valeurs de la charge hydraulique sur le Skeiðarárjökull, une charge hydraulique plausible a été calculée à partir d'une recharge constante dans le temps.

Étant donné que les processus hydrologiques sont plus rapides que les processus glaciologiques, on peut ici partir d'une charge hydraulique nulle pour arriver à l'équilibre. La solution d'équilibre a donc été obtenue en utilisant uniquement le modèle hydrologique forcé par le terme de recharge donné dans l'équation (5.5). On utilise ici un pas de temps d'un centième d'année (environ 84 heures) durant 200 ans. Le modèle d'écoulement glaciaire n'étant pas utilisé dans cette partie de la stabilisation, la géométrie, et donc la borne supérieure de la charge hydraulique, ne varie pas dans le temps.

(iii) Stabilisation du système couplé :

La dernière phase consiste à vérifier que les deux solutions précédentes (glaciologique et hydrologique) sont compatibles. Pour vérifier cette compatibilité, on a tout d'abord effectué une simulation durant dix années avec des pas de temps glaciologiques de 0.1 an et de  $1 \times 10^{-4}$  an pour le modèle hydrologique afin d'éviter de déstabiliser le modèle glaciologique. En effet la charge hydraulique qui avait été fixée à zéro pour la première partie de la stabilisation a beaucoup changée et entraîne donc une grande variation des vitesses de glissement. Une fois cette première phase effectuée, on repasse à des pas de temps plus long (1 an pour le modèle glaciologique, 0.01 an pour le modèle hydrologique) et on laisse le modèle revenir à un état d'équilibre durant 200 ans.

La chronologie des différentes phases de stabilisation ainsi que les pas de temps utilisés sont présentés sur la frise de la Figure 5.8.

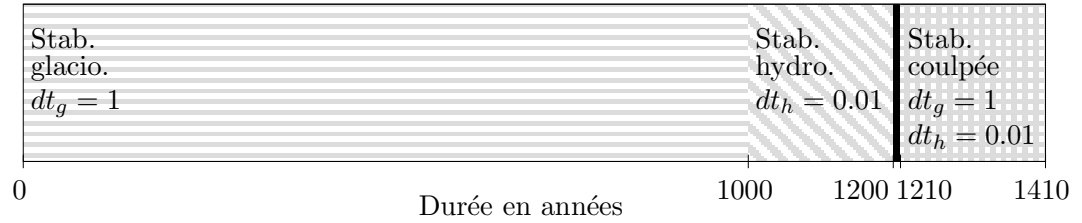


FIG. 5.8: Frise chronologique des différentes étapes de la stabilisation. Les pas de temps hydrologiques ( $dt_h$ ) et glaciologiques ( $dt_g$ ) sont exprimés en années. La barre verticale noire correspond aux dix ans de simulation couplée avec des pas de temps plus courts ( $dt_g = 0.1$  et  $dt_h = 1 \times 10^{-4}$ )

A l'issue de cette procédure d'initialisation, le glacier atteint un état d'équilibre pour le bilan de masse donné par l'équation (5.4) et le flux d'eau basal donné par (5.5).

### 5.2.3 Sensibilité aux paramètres hydrologiques

La procédure de stabilisation présentée dans la Section 5.2.2 a permis d'estimer les valeurs de références utilisées par le modèle hydrologique. Ces simulations ont aussi permis de réaliser une étude de sensibilité sur les différents paramètres qui entrent en jeu dans les deux systèmes de drainage. En effet l'obtention d'un état stationnaire à la fin de cette procédure d'initialisation permet de se prémunir des variations transitoires qui seront étudiées lors de l'expérience principale sur le jökulhlaup.

### 5.2.3.1 Choix des paramètres de référence

Les paramètres utilisés pour la simulation sont présentés dans le Tableau 5.1. Ces paramètres ont été obtenus de différentes manières :

- (i) Certains de ces paramètres sont des caractéristiques physiques bien connus, densité des matériaux, accélération de la gravité. . . Ces paramètres sont notés *wkp* (*well known parameters*) dans le Tableau 5.1.
- (ii) D'autres ont fait l'objet d'études qui ont été publiées. Pour ces paramètres, les références ayant permis leur détermination sont notées dans le Tableau 5.1.
- (iii) Enfin, la dernière classe de paramètres est ceux pour lesquels les valeurs sont incertaines. On dispose de peu d'informations sur leur valeur ou alors les informations dont on dispose donnent une fourchette de valeurs très large. Ces paramètres sont notés *pkp* (*poorly known parameters*) dans le Tableau 5.1.

On peut noter ici que la majeure partie des paramètres entrant en compte dans la loi de frottement sont méconnus et ont donc dû être fixés avec des valeurs admissibles. Pour certains paramètres tels que  $m$  et  $C$ , on a choisi d'utiliser des valeurs qui ajoutent un minimum de complexité à la loi de frottement.

Pour les paramètres du modèle hydrologique, nous nous sommes basés pour définir les paramètres de références sur les ordres de grandeur fournis par des études précédentes. Ainsi l'étude menée par Boulton *et al.* (2007b) sur le Breidamerkurjökull permet de réduire les ordres de grandeur communément admis. En effet, cette étude a été menée sur un glacier proche du Skeiðarárjökull et on peut donc supposer que les roches présentes à la base des deux glaciers sont de même nature. A partir de cette étude, on a donc choisi des valeurs pour la conductivité hydraulique et l'épaisseur du SDI. La conductivité hydraulique du SDE est quand à elle calculée à partir des données dont on dispose lors du jökulhlaup. Elle est définie à partir du temps  $t_t$  que l'eau met pour parcourir la distance  $d_t$  séparant le lac de l'exutoire du glacier tel que :

$$K_c = \frac{d_t}{t_t}, \quad (5.6)$$

ou les valeurs  $t_t$  et  $d_t$  proviennent de l'étude de Björnsson (2002).

Reste à définir la porosité des sédiments qui bien qu'elle ne soit pas connue ne possède pas une plage de valeur très étendue. On choisit donc pour cette dernière une valeur moyenne dans l'intervalle des valeurs possibles. La constante de temps  $\gamma$  est fixée à environ 2h tandis que le coefficient de couplage  $\varphi$  est choisi de telle façon que la convergence du modèle soit assurée.

Nous menons à partir de ces paramètres de référence une étude de sensibilité pour étudier la réponse du modèle à la variation des différents paramètres hydrologiques. Nous étudierons tout d'abord la réponse du modèle aux variations des différentes conductivités hydrauliques avant de se pencher sur les autres paramètres.

A partir des paramètres de référence choisis, on définit les caractéristiques principales du système de drainage. La Figure 5.9(a) présente les charges hydrauliques à l'état d'équilibre que l'on observe dans les deux systèmes de drainage après la procédure d'initialisation. On peut alors distinguer trois zones distinctes :

TAB. 5.1: Valeurs des paramètres utilisés pour cette expérience. La provenance des valeurs est indiquée par une référence si elle existe. *wkp* indique les termes bien connus et *pkp* les termes qui présentent une plus grande incertitude.

Paramètre	Valeur	Source
Paramètres physiques :		
$g$	$9.81 \text{ m s}^{-2}$	<i>wkp</i>
$L$	$3.34 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$	<i>wkp</i>
$\beta_l$	$5.04 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$	<sup>a</sup>
$\rho_w$	$1000 \text{ kg m}^{-3}$	<i>wkp</i>
$\rho_i$	$880 \text{ kg m}^{-3}$	<i>wkp</i>
Paramètres du modèle hydrologique :		
$Q_G$	$0.2 \text{ W m}^{-2}$	<sup>b</sup>
$e_s$	$20 \text{ m}$	<sup>c</sup>
$e_c$	$1 \text{ m}$	<i>pkp</i>
$\mathbf{K}_s$	$3 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$	<sup>c</sup>
$\mathbf{K}_c$	$1 \text{ m s}$	<sup>d</sup>
$\alpha$	$1 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$	<sup>e</sup>
$\gamma$	$6900 \text{ s}$	<i>pkp</i>
$\varphi$	$0.028$	<i>pkp</i>
$\omega_j$	$0.3$	<i>pkp</i>
Paramètres du modèle de dynamique :		
$A$	$6.8 \times 10^{-24} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$	<sup>f</sup>
$A_s$	$7.3 \times 10^{-6} \text{ m Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$	<i>pkp</i>
$C$	$1$	<i>pkp</i>
$m$	$1$	<i>wkp</i>
$n$	$3$	<i>wkp</i>

<sup>a</sup> Perkins (1820)

<sup>b</sup> Flovenz et Saemundsson (1993)

<sup>c</sup> Boulton *et al.* (2007b)

<sup>d</sup> Björnsson (2002)

<sup>e</sup> Flowers et Clarke (2002)

<sup>f</sup> Paterson (1994)

- ① La zone amont pour laquelle les charges hydrauliques des deux systèmes de drainage sont relativement faibles.
- ② La zone médiane pour laquelle la charge hydraulique du SDI est maximale (au niveau de flottaison) et la charge hydraulique du SDE (actif mais pas ouvert) est faible.
- ③ La zone aval pour laquelle le SDE est ouvert et permet donc de drainer le surplus d'eau présent dans le SDI. On observe alors des charges hydrauliques faibles dans les deux systèmes qui sont établies grâce à la grande capacité de drainage du SDE.

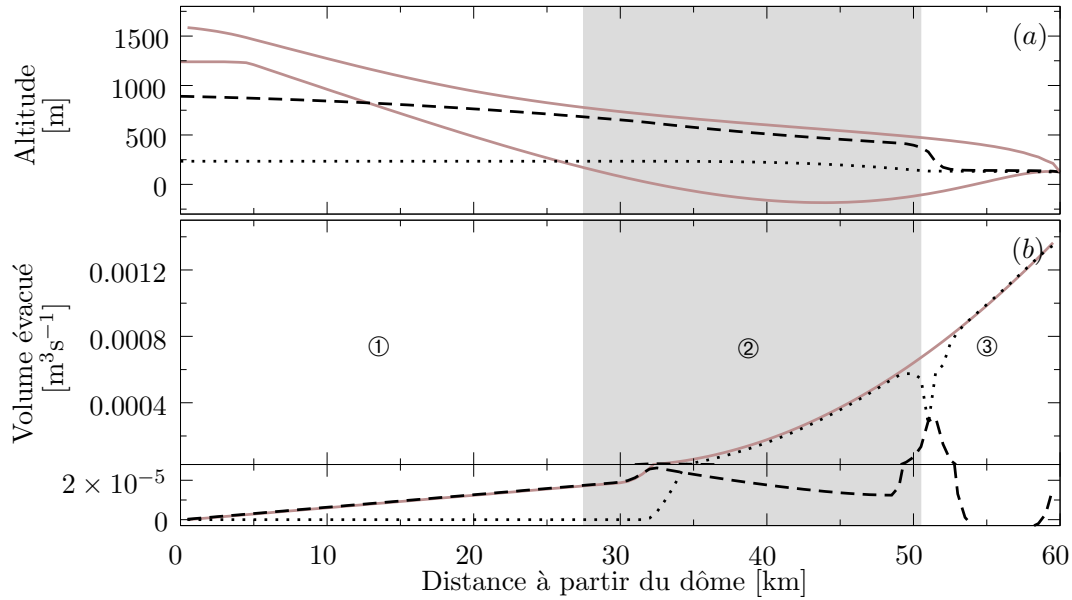


FIG. 5.9: (a) Charge hydraulique dans le SDI (tireté) et le SDE (pointillé) ainsi que la topographie de la surface et du socle du glacier (ligne grise) et (b) volume évacué par le SDI (tireté) et le SDE (pointillés). La ligne grise dans (b) correspond à l'évolution du volume d'eau injecté. Les zones ① à ③ correspondent respectivement aux zones amont, médiane et aval décrites dans le texte.

En parallèle, la Figure 5.9(b) présente l'évolution du volume d'eau drainé par les deux différents systèmes de drainage le long de la ligne d'écoulement. L'évolution de ces volumes reflète bien les charges hydrauliques observées précédemment. En effet, dans la partie amont, la totalité de l'eau générée par la fonte en surface et le flux géothermique est évacuée par le SDI. Dans la partie médiane, cette tendance tend à s'inverser avec un drainage de plus en plus faible de la part du SDI alors que le SDE évacue la presque totalité de l'eau produite. Dans la partie aval, l'augmentation du volume drainé par le SDI est dû au transfert que l'on observe entre SDI et SDE puis le volume d'eau drainé se stabilise à une valeur très faible. La discontinuité dans le volume drainé par le SDE est due au changement brutal de conductivité entre la zone active et la zone ouverte de ce système. On considère que cette discontinuité n'est pas significative car elle n'a pas d'impact sur les volumes drainés que l'on observe à l'aval.

Pour étudier la sensibilité du modèle, nous nous sommes basé sur deux estimateurs représentatifs de la charge hydraulique dans les deux systèmes. Ainsi la fraction d'eau drainée par le SDI

par rapport au volume total évacué permet d'évaluer l'efficacité relative du SDI en particulier lorsque ce dernier draine un volume d'eau relativement important (conductivité élevée ou apport d'eau faible). D'autre part, la position de l'extrémité amont du SDE ouvert nous renseigne à la fois sur la saturation du SDI et sur la capacité drainante du SDE.

### 5.2.3.2 Sensibilité à la conductivité des sédiments

L'évolution de la quantité d'eau drainée au front du glacier par le SDI est présentée en fonction de la variation de conductivité de ce système sur la Figure 5.10(b). L'évolution de cette fraction de drainage est clairement dépendante de la conductivité du SDI. Ainsi, l'eau produite par la fonte en surface et à la base du glacier est presque entièrement drainée par le SDE pour des valeurs de conductivité du SDI inférieures à  $10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ . Par opposition, la totalité de l'eau est drainée par le SDI quand sa conductivité hydraulique dépasse  $10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ . De ces deux situations, la première semble la plus vraisemblable étant donné qu'il est communément admis qu'une couche de sédiments ne peut drainer la totalité de l'eau produite par le glacier. De plus, les valeurs mesurées par Boulton *et al.* (2007a) sur le glacier voisin du Breidamerkurjökull (zone grisée de la Figure 5.10) semblent confirmer cette hypothèse. Dans cette zone grisée, on remarquera que la variabilité des fractions d'eau drainées à la variation de conductivité du SDI  $K_s$  est beaucoup plus faible.

Sur la Figure 5.10(a) est présentée l'évolution de la position de la limite amont du SDE ouvert. L'évolution de la position de cette extrémité ne varie pas lorsque la majorité de l'eau produite est évacuée par le SDI (pour  $K_s > 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ ) ce qui s'explique par le fait que dans cette zone le SDI évacue la majorité de l'eau et donc le SDE n'est pas activé et encore moins ouvert. Pour les valeurs de conductivité inférieures à  $10^{-2} \text{ m s}^{-1}$  on observe par contre une variation importante de la longueur de SDE qui est ouverte. Cette migration vers l'amont de l'extrémité du SDE ouverte s'explique par la diminution des possibilités de drainage du SDI qui est proportionnelle à sa conductivité. Le volume d'eau à évacuer dans le SDE est alors d'autant plus important que la conductivité du SDI est faible.

### 5.2.3.3 Sensibilité à la conductivité du système de drainage efficace

Avec les mêmes estimateurs que précédemment, on étudie la sensibilité du modèle hydrologique à une variation de la conductivité du SDE  $K_c$ . Les résultats de cette étude sont présentés sur la Figure 5.11. Pour permettre la comparaison avec la partie précédente, les simulations ont été menées ici avec une grande gamme de valeurs de conductivité. Toutefois, des conductivités hydrauliques inférieures à  $10^{-2} \text{ m s}^{-1}$  ne semblent pas très réalistes pour un SDE. En effet, on a vu dans la Section 4.1.2.1 que des valeurs de conductivités inférieures à  $0.2 \text{ m s}^{-1}$  étaient généralement associées à des SDI. De plus, la loi de frottement utilisée ne permet pas d'obtenir un champ de vitesses stabilisé dans ces cas là. En effet, avec ces valeurs de  $K_c$ , la charge hydraulique dans le SDE est trop importante pour pouvoir drainer le SDI et la charge dans ce dernier est alors égale à la limite de flottaison sur toute la longueur de la ligne de courant. Pour les simulations où le couplage n'a pas pu être mis en place, on utilise les résultats de la stabilisation hydrologique seule ( $t = 1200$  sur la Figure 5.8).

L'évolution de la fraction d'eau drainée par le SDI est très faible sur la totalité de la plage

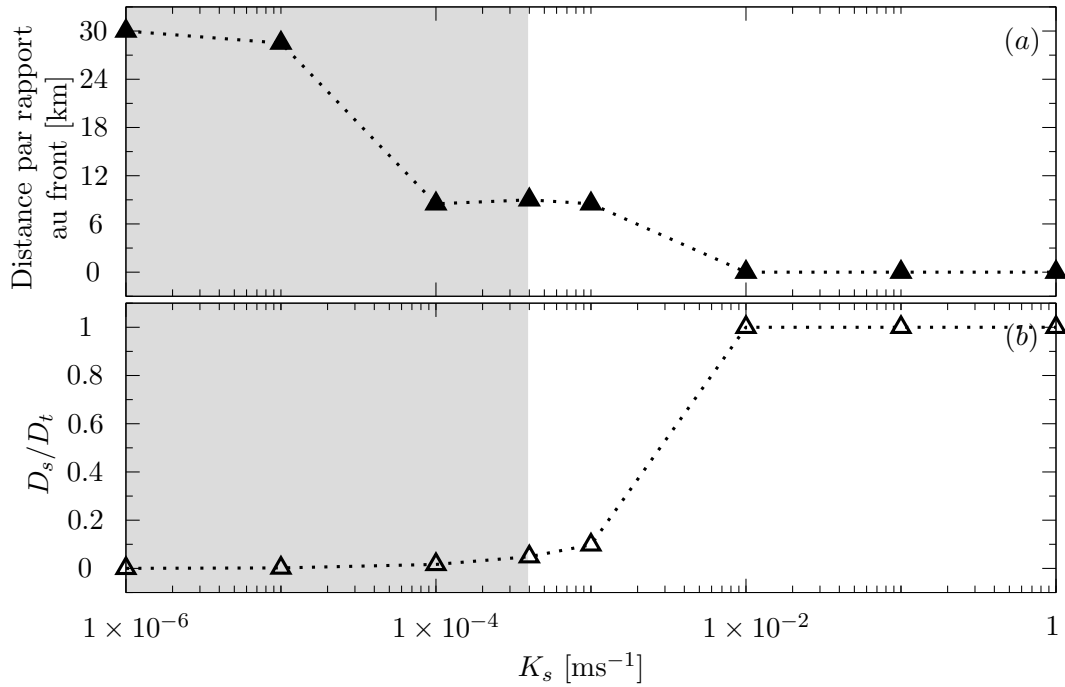


FIG. 5.10: Sensibilité du modèle à la variation de la conductivité du SDI  $K_s$ . La figure (a) présente la longueur du SDE ouvert et la figure (b) les variations de la fraction d'eau drainée par le SDI ( $D_s/D_t$ ). Les paramètres autres que la conductivité du SDI prennent les valeurs de référence données dans le Tableau 5.1. La zone grisée correspond à la fourchette des valeurs de conductivité mesurées par Boulton *et al.* (2007a) sur le Breidamerkurjökull.

des valeurs étudiées. On observe par contre une variabilité marquée de la position de l'extrémité amont du SDE ouvert, avec une différence importante entre les valeurs de conductivité faibles ( $K_c < 10^{-1}$  m s<sup>-1</sup>) et les valeurs de conductivité plus importantes. Ainsi, pour des valeurs de conductivité du SDE inférieures à  $10^{-1}$  m s<sup>-1</sup> le SDE est ouvert sur une portion importante de la ligne d'écoulement. Cette ouverture est due aux conductivités faibles qui entraînent la mise en place de charges hydrauliques largement supérieures à la limite de flottaison dans le SDE. Ces charges hydrauliques trop importantes empêchent le drainage du SDI entraînant alors la mise sous pression de ce système et son ouverture. Pour les valeurs plus usuelles de conductivité ( $K_c > 10^{-1}$  m s<sup>-1</sup>), la variabilité dans la position de l'extrémité amont du SDE ouvert est beaucoup moins importante. Pour les valeur de  $K_c$  supérieurs à 1 m s<sup>-1</sup> l'extrémité amont du SDE ouvert se situe assez proche du front (1/10 de la longueur de la ligne d'écoulement). Cette valeur est compatible avec la transition de SDI à SDE que l'on observe au début de l'été sur le glacier d'Arolla Nienow *et al.* 1998) Nienow (Sharp); Mair *et al.* (2002).



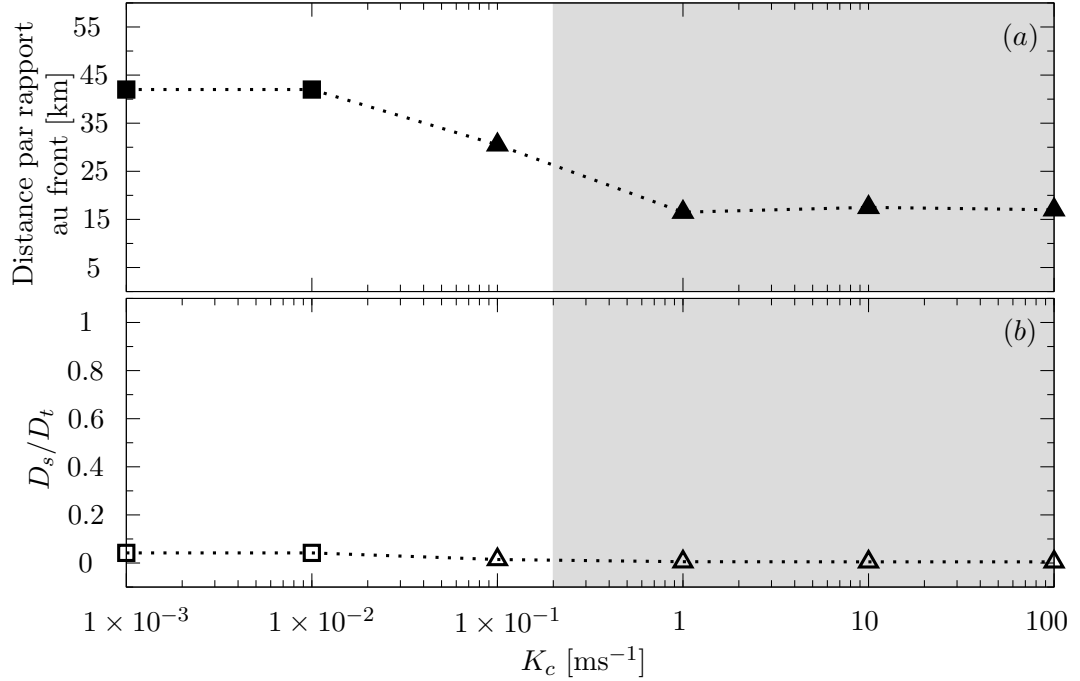


FIG. 5.11: Sensibilité du modèle à la variation de la conductivité du SDE. La figure (a) présente la longueur du SDE ouvert et la figure (b) les variations de la fraction d'eau drainée par le SDI ( $D_s/D_t$ ). Les paramètres autres que la conductivité du SDE prennent les valeurs de référence données dans le Tableau 5.1. La zone grisée correspond aux valeurs de conductivité communément admises pour un SDE, les carrés correspondent aux simulations pour lesquelles la stabilisation couplée n'a pas été effectuée.

#### 5.2.3.4 Sensibilité à l'épaisseur de la couche de sédiments

La sensibilité du modèle a ensuite été évaluée par rapport à l'épaisseur de la couche de sédiments qui constitue le SDI. En vue d'obtenir des résultats comparables pour les différentes épaisseurs, on fait varier la conductivité hydraulique du SDI en même temps que son épaisseur pour garder sa transmissivité constante. Les résultats de cette étude sont présentés sur la Figure 5.12.

La quantité d'eau évacuée par le SDI varie très peu avec l'épaisseur de la couche de sédiments (notez l'échelle différente pour ce graphe). Concernant la position de la limite amont de l'ouverture du SDE, la variabilité est aussi assez faible au regard de ce paramètre si l'on ne considère que les épaisseurs de sédiments comprises entre 10 et 35 m. Au delà de ces valeurs, on observe une augmentation de la longueur du SDE ouvert. Dans le cas des faibles valeurs de  $e_s$ , cette variabilité est due au fait que le coefficient de stockage  $S_{sed}$  de la couche de sédiment est faible entraînant alors des charges hydrauliques plus élevées à volume d'eau égal (équation 4.51) et une ouverture plus rapide du SDE.

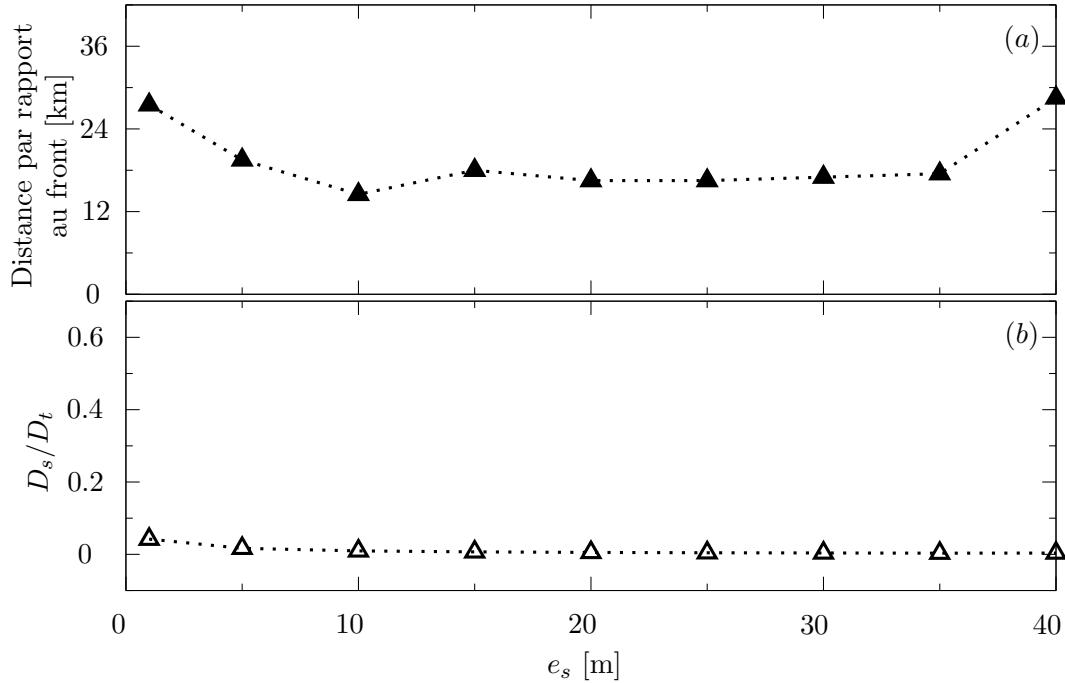


FIG. 5.12: Sensibilité du modèle à la variation de l'épaisseur de la couche de sédiments. La figure (a) présente la longueur du SDE ouvert et la figure (b) les variations de la fraction d'eau drainée par le SDI ( $D_s/D_t$ ). La conductivité du SDI varie pour conserver une transmissivité de  $2 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , les autres paramètres prennent les valeurs de référence données dans le Tableau 5.1.

### 5.2.3.5 Conclusion sur la sensibilité du modèle

Les deux premières expériences réalisées montrent une sensibilité marqué du modèle à la conductivité des deux systèmes de drainage. Dans ces deux cas, la réponse du modèle hydrologique présente deux comportements très différents dont l'un paraît plus réaliste que l'autre. Dans le cas de la sensibilité à la conductivité du SDI  $K_s$ , le drainage de la totalité de l'eau par le SDI est irréaliste comme montré par Moeller *et al.* (2007). Dans le cas de la sensibilité à la conductivité du SDE  $K_c$ , c'est une charge hydraulique excessive dans le SDE due à une conductivité trop faible qui est à l'origine de la variabilité de la longueur de l'ouverture du SDE.

Dans les deux cas, le passage d'un comportement à l'autre est bien marqué et les valeurs de conductivité mises en œuvres sont compatibles avec les données recueillies sur le terrain. La sensibilité à l'épaisseur de la couche de sédiments quant à elle présente une très faible variabilité tant que le coefficient de stockage du SDI reste supérieur à celui du SDE d'un ordre de grandeur. Ainsi le rapport entre les épaisseurs du SDI et du SDE n'a que peu d'influence sur le fonctionnement du système de drainage tant que l'on garde une couche de sédiments dont l'épaisseur est raisonnable ce qui valide l'hypothèse qui a été faite d'une couche équivalente d'épaisseur unité.

### 5.3 Résultats

Les résultats de la modélisation du jökulhlaup sont présentés dans cette section. On vérifiera dans un premier temps que les paramètres choisis pour le modèle hydrologique sont en accord avec les observations effectuées lors du jökulhlaup. On présentera ensuite les résultats obtenus lors d'une simulation de référence que l'on comparera aux données disponibles. Enfin on étudiera la sensibilité du modèle couplé à la variation de certains paramètres hydrologiques. Ces expériences de sensibilité en régime transitoire complètent celles qui ont été mené dans la Section 5.2.3.

#### 5.3.1 Vérification des paramètres hydrologiques

Bien que notre modèle ne soit pas conçu pour calculer précisément les débits au front d'un glacier, il doit permettre d'obtenir un hydrogramme satisfaisant. En effet, si l'hydrogramme est correctement reproduit, on peut supposer que les paramètres du système de drainage sont conformes à la réalité.

L'hydrogramme du jökulhlaup de novembre 1996 a été mesuré par Snorrason *et al.* (1997) puis modélisé par Flowers *et al.* (2004) grâce à un modèle d'hydrologie sous glaciaire. On utilisera donc cette hydrogramme modélisé pour vérifier que les valeurs par défaut des paramètres hydrologiques que l'on a choisi permettent de générer une onde de crue conforme à la réalité. Les hydrogrammes obtenus lors de différentes simulations ainsi que l'hydrogramme obtenu par Flowers *et al.* (2004) sont présentés sur la Figure 5.13

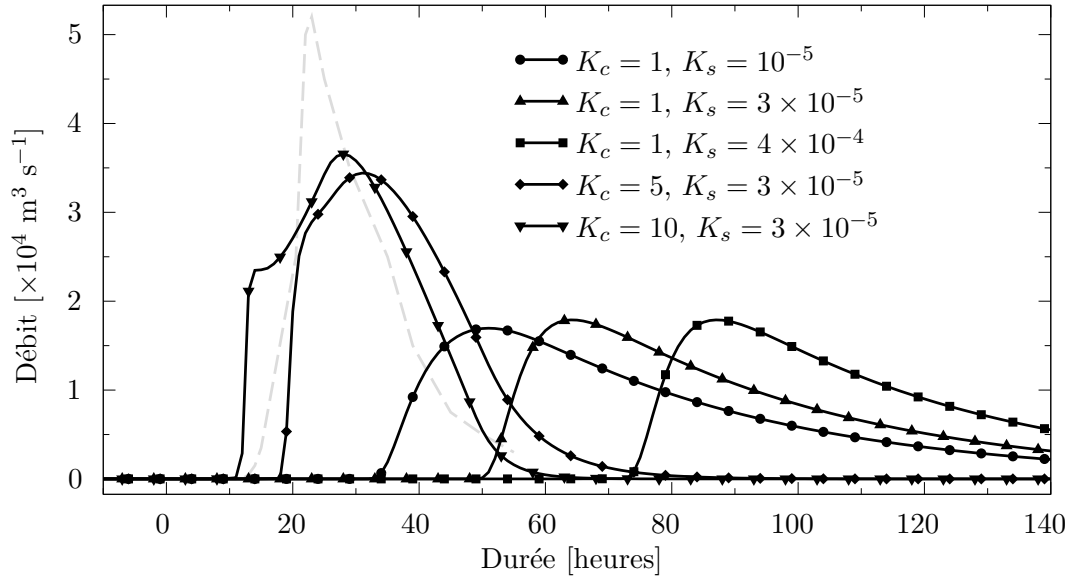


FIG. 5.13: Hydrogrammes obtenus lors de différentes simulations comparé à celui calculé par Flowers *et al.* (2004) (tireté gris). Le temps  $t = 0$  est pris au début de la vidange du lac. Les valeurs de  $K_s$  et  $K_c$  sont données en  $\text{m s}^{-1}$ , les autres paramètres gardent leur valeurs de références définies dans le Tableau 5.1

La Figure 5.13 montre que l'hydrogramme que l'on calcule est fortement dépendant des

valeurs de conductivités hydrauliques. Ainsi, une augmentation de la conductivité du SDI génère un retard dans l'initiation de la crue au front du glacier. Cette conséquence est due au fait que la charge hydraulique dans le SDI pour une conductivité plus élevée est moins importante. Il faudra donc plus de temps pour que le SDI se mette en charge et donc que le SDE permette de drainer l'afflux massif d'eau. L'augmentation de la conductivité  $K_c$  du SDE entraîne quant à elle un "resserrement" de l'hydrogramme. La réduction de la période de drainage est ici permise par la plus grande capacité drainante du SDE qui entraîne une évacuation plus rapide du surplus d'eau engendré par le jökulhlaup. A partir de cette étude on redéfinit les valeurs des conductivités des deux différents systèmes pour que l'hydrogramme que l'on modélise soit plus en accord avec celui qui a été calculé par Flowers *et al.* (2004). On prendra donc dans la suite une conductivité  $K_s = 3 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$  pour le SDI et  $K_c = 10 \text{ m s}^{-1}$  pour le SDE.

### 5.3.2 Modélisation de la dynamique post-jökulhlaup

Les vitesses de surface calculées par le modèle sont comparées aux données acquises par les satellites ERS1/2. Le calcul des vitesses par interférométrie radar (InSAR) se fait en comparant deux images radar. Les instruments et la configuration d'orbite des satellites ERS1/2 permettent de calculer précisément les vitesses de surface. Toutefois, on ne dispose pas d'images exploitables en continu. Pour notre période d'intérêt, les images disponibles permettaient de calculer des vitesses avant et après le jökulhlaups mais il reste entre deux images un laps de temps assez important pour que l'on ne puisse pas définir précisément l'évolution de la dynamique du glacier pendant le jökulhlaup.

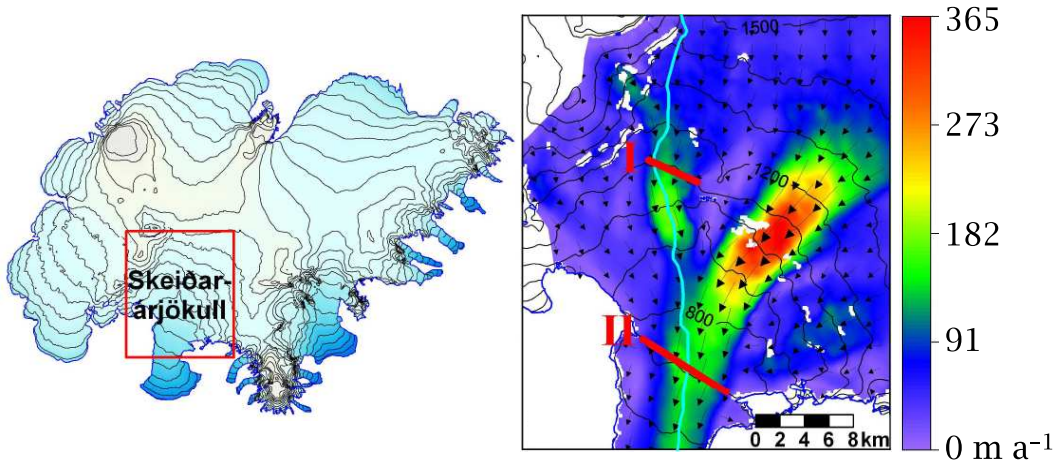


FIG. 5.14: Localisation du Skeiðarárjökull sur la calotte de Vatnajökull (à gauche) et carte des vitesses de référence acquises durant l'hiver 1995-1996. Les profils amont et aval sont indiqués en rouge et la ligne d'écoulement du modèle en bleu clair. Figure tirée de Magnússon *et al.* (2010)

Mon modèle représente une ligne d'écoulement, alors que les mesures de vitesses obtenues par InSAR par Magnússon *et al.* (2010) donnent une carte de vitesses sur tout le glacier. A partir de cette carte, ils ont choisi de travailler plus précisément sur deux profils perpendiculaires à la

TAB. 5.2: Valeurs des paramètres utilisés lors de la modélisation du jökulhlaup.

Simulation	$K_s$	$K_c$
K1	$3 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$	$5 \text{ m s}^{-1}$
K2	$3 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$	$10 \text{ m s}^{-1}$

ligne d'écoulement (Figure 5.14).

Pour pouvoir comparer les données issues du modèle avec les mesures, les vitesses mesurées et modélisées sont comparées aux points d'intersection entre la ligne d'écoulement du modèle et les profils I et II (Figure 5.15). On aura donc deux points de comparaison, l'un à  $x = 12 \text{ km}$  et l'autre à  $x = 38 \text{ km}$ , où  $x = 0$  correspond toujours à la position du dôme qui forme la frontière amont du modèle.

Sur la Figure 5.15(c), on remarque que la vitesse mesurée au jour -400 est plus importante que la vitesse de référence choisie. Cela s'explique par le fait que la vitesse de référence a été calculée sur plusieurs mesures faites au cours de l'hiver alors que la vitesse plus importante a été observée durant l'été. Cette variabilité saisonnière est beaucoup plus marquée sur la partie aval du glacier que sur sa partie amont ce qui explique que l'on ne retrouve cette anomalie de vitesse que sur le profil II.

La Figure 5.16 présente les résultats de deux simulations aux points  $x = 12 \text{ km}$  ( $a1$  et  $b1$ ) et  $x = 38 \text{ km}$  ( $a2$  et  $b2$ ). Les résultats que l'on présente correspondent à l'évolution de la charge hydraulique dans le SDI et des vitesses horizontales de surface. On décrit tout d'abord les résultats obtenus lors de deux simulations (K1 et K2) effectuées avec des conductivités hydrauliques différentes. Les conductivités utilisées lors de ces simulations sont présentées sur le Tableau 5.2.

On décrit les principaux événements de la simulation en se basant sur les résultats obtenus au point  $x = 12 \text{ km}$  pour la simulation K2. On utilise pour caractériser ces différentes phases les durées reportées sur la Figure 5.16 sachant que l'on définit le temps  $t = 0$  comme le début de la vidange du lac du Grímsvötn

De  $t = 0$  à  $t = 10 \text{ h}$  : immédiatement après l'injection de l'eau, la charge hydraulique dans le SDI augmente jusqu'à atteindre la pression de flottaison. La pression d'eau élevée à la base du glacier entraîne alors une diminution importante de la pression effective et donc une augmentation de la vitesse de surface du glacier due à une vitesse de glissement très importante. L'augmentation des vitesses n'a pas été évaluée durant le jökulhlaup de Novembre 1996 à cause d'un manque de données sur cette période. Toutefois, les vitesses modélisées durant cet événement sont compatibles avec ce que l'on peut observer pour d'autres glaciers dans la même situation, soit des vitesses deux à trois fois plus élevées que la normale (Magnússon *et al.*, 2007).

De  $t = 10 \text{ h}$  à  $t = 3.4 \text{ jours}$  : une fois que la charge hydraulique dans le SDI a atteint son maximum (la limite de flottaison) le SDE est mis en pression et rapidement connecté à l'exutoire. L'eau présente dans ce système est alors drainée et la pression chute dans le SDE. Durant cette phase, la charge hydraulique dans le SDI diminue très légèrement tout comme les vitesses de surface.

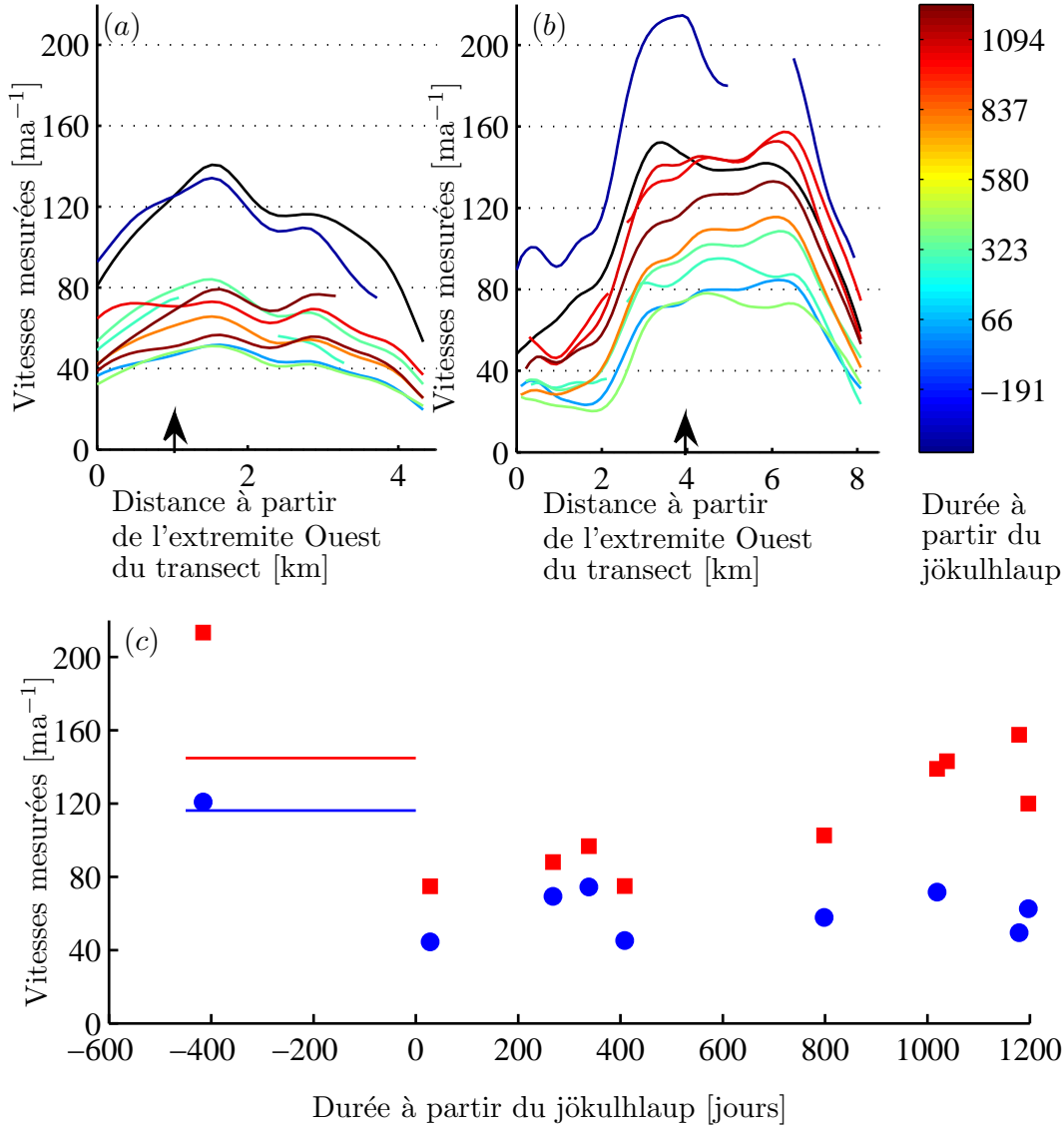


FIG. 5.15: Vitesses mesurées par Magnússon *et al.* (2010) sur les profils I (a) et II (b). Le graphe (c) présente l'évolution des vitesses mesurées à l'intersection entre la ligne de courant modélisé et le profil I (ronds bleus) ainsi que l'intersection avec le profil II (carrés rouges). Les vitesses utilisées sont prises aux abscisses marquées d'une flèche. Les segments bleus et rouges correspondent aux vitesses de référence définies par Magnússon *et al.* (2010) avant le jökulhlaup pour les profils I et II respectivement.

De  $t = 3.4$  jours à  $t = 3.5$  jours : la charge hydraulique dans le SDE devient inférieure à celle du SDI, le flux de transfert entre SDI et SDE permet de drainer le surplus d'eau présent dans le premier. La charge hydraulique dans les deux systèmes diminue alors sous l'effet du drainage très important du SDE. Le volume d'eau qui avait été injecté est alors évacué entraînant une augmentation rapide de la pression effective à la base du glacier et donc une

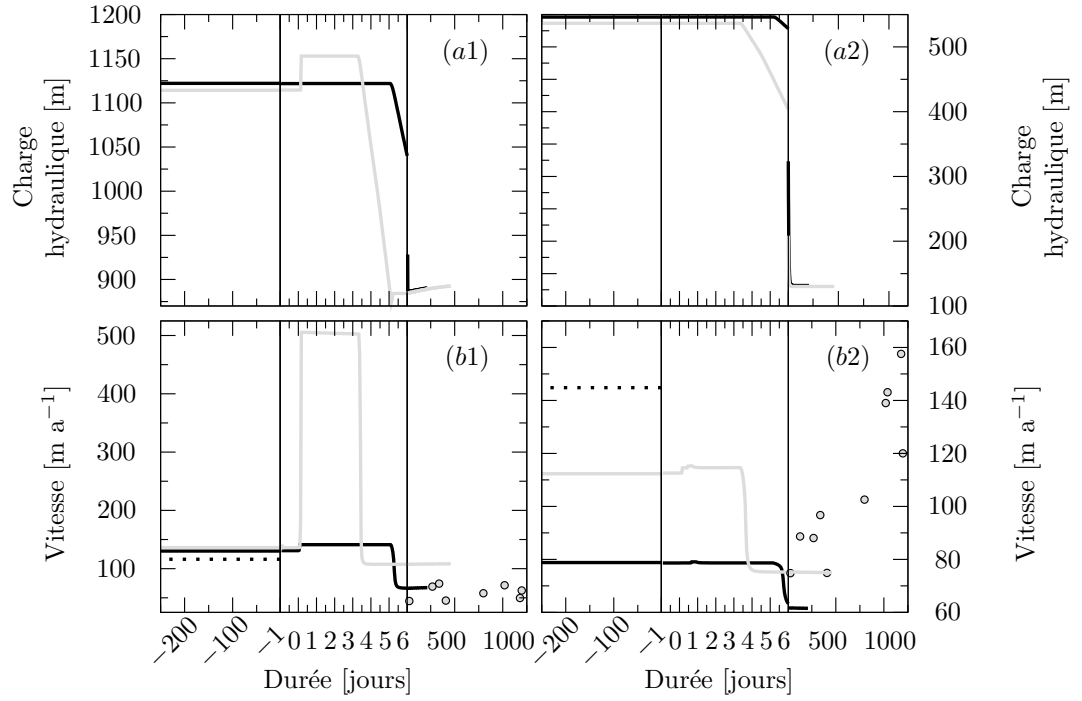


FIG. 5.16: Évolution de la charge hydraulique dans le SDI au point  $x = 12$  km ( $a1$ ) et au point  $x = 38$  km ( $a2$ ) ainsi que des vitesses horizontales de surface aux mêmes points (Figures ( $b1$ ) et ( $b2$ )). Sur tous les graphes, le temps  $t = 0$  correspond au début de la vidange du lac. Le panneau de gauche correspond à la phase d'initialisation. Les lignes pointillées et les points correspondent aux données de Magnússon *et al.* (2010). Les paramètres des deux simulations sont ceux du Tableau 5.1 sauf pour les conductivités qui sont données dans le Tableau 5.2. Les traits gris représentent la simulation K2 et les trait noirs la simulation K1.

diminution importante du glissement. On observe par conséquent des vitesses de surface beaucoup plus faibles.

De  $t = 3.5$  jours à  $t = 250$  jours : après l'épisode de drainage intense du SDI on observe une légère augmentation des vitesses de surface en réponse au lent re-remplissage du SDI bien que les échelles utilisées ne permettent pas de voir cette augmentation sur la figure 5.16.

La comparaison entre les vitesses de surface modélisées et celles obtenues par InSAR montre un accord plus ou moins bon selon les simulations et la localisation du point d'observation. En effet, on observe une augmentation significative des vitesses durant le jökulhlaup uniquement pour la simulation K2 et au point  $x = 12$  km. C'est aussi la seule simulation pour laquelle on observe une augmentation de la charge hydraulique dans le SDI lors de la vidange du lac. La simulation K1 au point  $x = 12$  km, permet par contre de mettre en évidence, plus clairement que pour la simulation K2, la diminution des vitesses après l'épisode de crue. Cette même diminution des vitesses est observable au point  $x = 38$  km pour les deux simulations.

Cette différence de comportement entre accélération importante durant la vidange glaciaire et diminution des vitesses après la crue peut être expliquée par la charge hydraulique que l'on observe dans le SDI avant la perturbation. Toutes les simulations qui montrent une diminution importante des vitesses de surface présentent une charge hydraulique élevée avant la perturbation. Ainsi, la charge hydraulique du SDI dans ces cas là est élevée et ne varie que très peu lors de la perturbation. Ce niveau de charge hydraulique engendre une pression effective faible qui diminue peu lors de la perturbation. Cette pression effective faible entraîne la mise en place de vitesses relativement élevées avant et durant la perturbation. L'ouverture du SDE permet alors de drainer rapidement l'eau présente dans le SDI et entraîne une chute de la charge hydraulique et donc une augmentation de la pression effective. C'est cette augmentation de pression effective qui conduit à la diminution des vitesses de surface. Le deuxième cas de figure est celui que l'on observe au point  $x = 12$  km pour la simulation K2. Dans ce cas là, la charge hydraulique avant la perturbation est plus faible. L'établissement d'une charge plus importante lors de la simulation entraîne alors une diminution de la pression effective et donc une augmentation des vitesses ; la vidange du SDI n'apporte par contre ici qu'une diminution des vitesses assez faible par rapport à l'état initial étant donné que la pression effective finale est comparable à la pression initiale.

La forte variation spatiale dans l'évolution des vitesses se retrouve sur toute la longueur de la ligne d'écoulement. On présente sur la Figure 5.17 la distribution de la charge hydraulique du SDI et de la vitesse horizontale de surface pour les simulations K1 et K2.

Les deux comportements que l'on a observé ponctuellement sur la Figure 5.17 se retrouvent sur la totalité de la ligne d'écoulement :

Les zones dans lesquelles la charge hydraulique est importante avant le début de la perturbation ne présentent que de faibles augmentations de vitesse durant le jökulhlaup. Leur réponse à une diminution de charge hydraulique est, par contre, beaucoup plus marquée avec des diminutions importantes de vitesses entre l'état initial et le nouvel état stabilisé. Ce phénomène est bien illustré par la simulation K1 pour laquelle l'augmentation de charge hydraulique est faible durant le jökulhlaup. Il en résulte une accélération modérée. Par contre, la vidange du SDI entraîne une diminution importante des vitesses sur toute la ligne de courant.



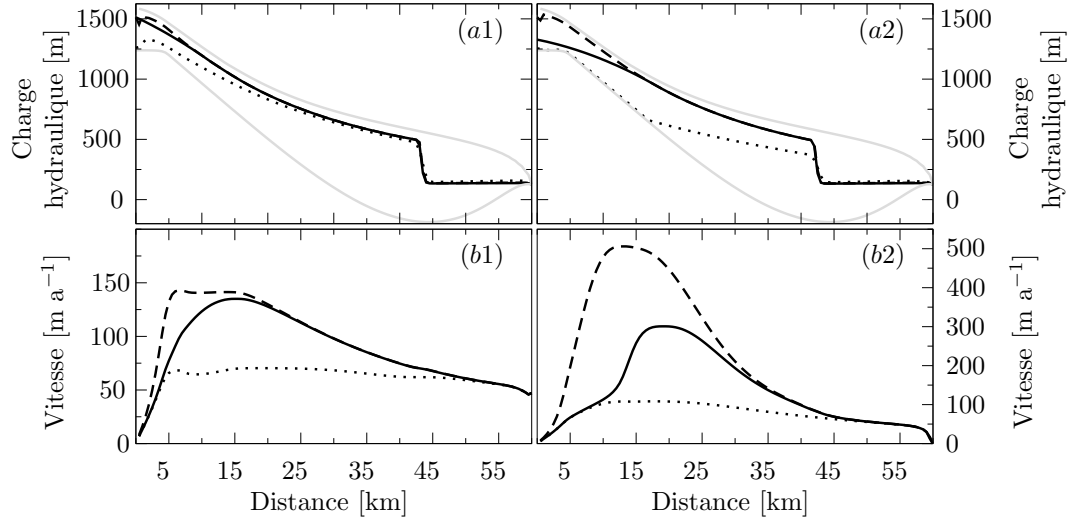


FIG. 5.17: Évolution de la charge hydraulique du SDI (a) et des vitesses horizontales de surface (b) le long de la ligne de courant. Les Figures (a1) et (b1) correspondent à la simulation K1 et (a2) et (b2) correspondent à la simulation K2. Les variables sont présentées avant la perturbation (traits pleins), pendant l'épisode de surge (tireté) et à la fin de la relaxation (pointillés). La topographie du socle et de la surface est présentée en gris sur les Figure (a).

Si les charges hydrauliques sont plus faibles, on observe une accélération importante lors du jökulhlaup. Cette situation s'observe sur la partie amont de la ligne d'écoulement pour la simulation K2. L'augmentation de charge hydraulique est à l'origine de vitesses importantes entre le dôme et  $x \simeq 15$  km qui génèrent aussi une accélération dans la partie aval de la ligne d'écoulement. On observe par contre dans ce cas, que le retour de la charge hydraulique du SDI à un niveau plus bas que l'origine, ne génère pas de grandes différences de vitesses entre état initial et état final.

Ces simulations montrent donc une variabilité spatiale importante qui est fortement liée à la charge hydraulique du SDI. On pouvait s'attendre à ce lien étant donné que la pression effective qui contrôle la vitesse de glissement est directement liée à cette charge hydraulique. La charge initiale du SDI va donc contrôler la réponse du glacier.

### 5.3.3 Sensibilité du modèle en régime transitoire

Contrairement aux expériences menées dans la Section 5.2.3, on observe ici la réponse transitoire du modèle à la variation de certains paramètres hydrologiques. On utilisera la durée du surge glaciaire comme estimateur pour cette étude.

#### 5.3.3.1 Sensibilité à la conductivités du SDE

Les simulations K1 et K2 présentés sur la Figure 5.17 montrent des différences de comportement dans l'amplitude des variations de vitesse en fonction de la conductivité du SDE. On

observe aussi des différences dans l'évolution temporelle de la réponse. En effet, l'augmentation de vitesse modélisée durant la simulation K1 (même si elle est faible) présente une durée plus longue que celle qui est modélisée pour la simulation K2. Dans la Partie 5.3.2, une première approximation de la conductivité du SDE a été faite en prenant en compte le temps de trajet de l'onde de crue (Équation (5.6)). Les valeurs de conductivité ont alors été modifiées pour être en accord avec l'hydrogramme modélisé par Flowers *et al.* (2004). On observe alors ici la variabilité de la durée de l'épisode de forte vitesse en fonction de la conductivité du SDE comme présenté sur la Figure 5.18.

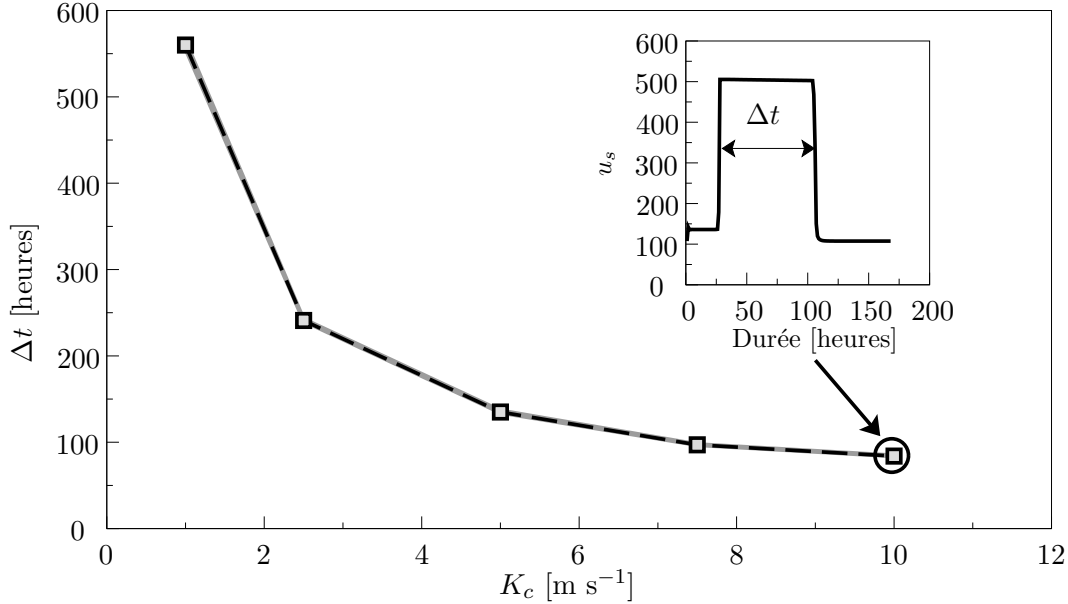


FIG. 5.18: Évolution de la durée de l'événement de forte vitesse  $\Delta t$  en fonction de la conductivité du SDE  $K_c$ . L'insert montre l'évolution des vitesses horizontales de surface  $u_s$  (à  $x = 12\text{km}$ ) en fonction du temps pour la simulation dont le résultat est entouré dans le graphe principal. La durée de l'événement de forte vitesse  $\Delta t$  est définie dans l'insert.

Malgré la faible densité de points reportés sur la Figure 5.18 cette étude montre une très grande sensibilité de l'épisode de surge à la conductivité hydraulique du SDE. En effet, les vitesses de surface élevées correspondent aux vitesses de glissement importantes. Avec la loi de frottement utilisée, ce glissement important à la base du glacier est engendré par une pression effective faible et donc une charge hydraulique élevée dans le SDI. La durée de l'épisode de forte vitesse sera donc directement liée à la durée pendant laquelle la charge hydraulique reste élevée dans le SDI. La conductivité hydraulique du SDE joue un rôle important dans la dynamique de drainage du SDI. En effet, si la conductivité du système de drainage est relativement faible, alors l'évacuation de l'eau se fera relativement lentement et la charge hydraulique dans le SDE restera élevée pendant un temps assez long. Or, le mécanisme de transfert entre couches décrit par l'équation (4.57) permet le transfert d'eau uniquement quand la charge hydraulique dans le SDE est inférieure à celle du SDI. Ainsi une conductivité faible du SDE entraîne un drainage

moins rapide du SDI, et donc des vitesses de glissement importantes sur une durée plus longue.

A l'aide de la Figure 5.18, et de mesures précises de la durée de l'épisode de forte vitesse, on pourrait donc donner une estimation plus précise de la conductivité hydraulique du SDE. Cette détermination n'est pas possible ici à cause du manque de données qui ne permet pas de localiser précisément dans le temps le début et la fin de l'épisode de forte vitesse.

### 5.3.3.2 Sensibilité au volume de la perturbation

Le volume d'eau drainé durant le jökulhlaup a été défini à partir de mesures altimétriques à la surface de la glace flottant sur le lac. Ces mesures, ainsi que la connaissance de la bathymétrie du lac permettent de donner une idée assez précise du volume d'eau qui a été injecté sous le glacier. Une incertitude persiste sur le nombre de chenaux qui se forment à la base du glacier et donc sur le volume d'eau à injecter dans un modèle à deux dimensions pour lequel on a fait l'hypothèse qu'un chenal existait sous la ligne d'écoulement modélisée. Je me suis donc basé sur l'étude de Björnsson (1998) qui avance que, pour ce type de jökulhlaup, il se forme de 10 à 15 chenaux de grande capacité de drainage. Le volume d'eau mesuré par altimétrie a donc été divisé entre 12 chenaux. La sensibilité du modèle au nombre de chenaux a ensuite été observée. La réponse observée est du même type que celle que l'on a déjà vu pour la conductivité hydraulique du SDE. Ici, plus le volume d'eau injecté sera important et plus la durée de l'épisode de forte vitesse sera longue. L'amplitude de la perturbation par contre est très différente. Par exemple, en prenant une valeur de conductivité  $K_c = 10 \text{ m s}^{-1}$  et en utilisant des volumes considérant de 10 à 15 chenaux, on obtient une variation de la durée de l'épisode de forte vitesse d'une heure et demi. Cette variabilité semble donc négligeable par rapport à celle que l'on observe lorsque l'on fait varier la conductivité du SDE.

## 5.4 Conclusion sur les résultats obtenus

Les expériences de sensibilité menées sur la phase de stabilisation du modèle couplé ont montré que le schéma utilisé par le modèle reproduisait bien les principales caractéristiques des systèmes de drainage sous-glaciaire. Les valeurs des différents paramètres nécessaires au fonctionnement du modèle restent toutefois méconnues. Des campagnes de terrains dédiées à la mesure des conductivités hydrauliques à différentes périodes de l'année devraient permettre de mieux contraindre les variables d'entrée et ainsi de mettre en place des simulations plus précises.

Dans un deuxième temps, la comparaison avec la dynamique post-jökulhlaup a permis de montrer que le couplage du modèle hydrologique avec le modèle d'écoulement permet de modéliser les interactions entre hydrologie sous-glaciaire et vitesses à la surface du glacier. Ces expériences ont permis de mettre en évidence différents comportements lors de la mise en charge du système de drainage. La simulation précise du jökulhlaup semble toutefois demander des données plus précises tant en terme d'hydrologie que de dynamique glaciaire. De plus, les phénomènes 3D qui n'ont pas été pris en compte lors de cette modélisation semblent jouer un rôle important sur la dynamique du Skeiðarárjökull. En effet, la Figure 5.14 montre que le Skeiðarárjökull présente deux branches dans son champ de vitesse. De ces deux branches, celle de droite (que l'on ne modélise pas) semble avoir une contribution plus importante sur les vitesses dans la partie aval du glacier que celle de gauche.

---

Ainsi, une modélisation à trois dimensions ainsi que des mesures de vitesses plus rapprochées dans le temps devraient permettre de mieux contraindre le modèle et donc de donner des résultats plus satisfaisants sur l'évolution de la dynamique glaciaire.



# Conclusion

Ce travail a permis de mettre en place un modèle d'hydrologie sous-glaciaire adapté à la modélisation de la dynamique glaciaire. Nous pouvons ainsi mettre à profit les lois de frottement qui ont été développées en tenant compte de l'interaction entre vitesse de glissement et pression d'eau à la base du glacier. Les vitesses basales ainsi calculées permettront d'imposer au modèle d'écoulement glaciaire des conditions aux limites plus proches de la réalité.

Le modèle d'hydrologie qui a été développé se démarque des modèles existants sur deux aspects :

L'objectif de ce modèle étant le calcul d'une pression basale, les composantes supra- et intra-glaciaires du système de drainage, qui sont importantes dans le calcul du temps de réponse du système hydrologique complet, sont ici négligées.

La modélisation du seul système sous-glaciaire permet alors de traiter ce dernier avec plus de précision et en particulier de modéliser un système de drainage inefficace ainsi qu'un système de drainage efficace.

La prise en compte de ces deux systèmes de drainage intimement liés repose sur la méthode du double continuum. Cette méthode, très utilisée en hydrologie karstique permet de modéliser un système efficace chenalisé sous la forme d'une couche continue équivalente. L'utilisation du double continuum permet de modéliser des phénomènes sous maille sans pour autant nécessiter une connaissance très poussée de la topologie de ces systèmes. La modélisation de l'écoulement repose alors sur un nombre réduit de paramètres qui sont (plus ou moins facilement) accessibles à la mesure. Contrairement aux approches classiques qui considèrent effectivement des systèmes de drainage chenalisé l'utilisation d'une couche équivalente continue ne devrait pas poser de problème pour le traitement de problème à trois dimensions. En effet, l'utilisation d'une couche continue équivalente permet de se désintéresser de la localisation des chenaux. Les modèles utilisant effectivement des chenaux se basent généralement sur la formule du gradient hydraulique de Shreve pour les localiser. Or cette formule considère une pression effective nulle et n'est donc pas compatible avec l'utilisation d'une loi de frottement.

L'étude de sensibilité présentée dans le Chapitre 5 a montré que la méthode mise en place permet de reproduire les principales caractéristiques des systèmes de drainage sous-glaciaires. En effet, les paliers que l'on observe pour la sensibilité aux différentes conductivités montrent un comportement «réaliste» du modèle lorsque les valeurs de conductivité sont fixées en accord avec les observations. La faible variabilité que l'on observe lorsque l'épaisseur de la couche de sédiment varie montre que le rapport entre les épaisseurs du SDI et du SDE n'a que peu d'influence sur le fonctionnement du système de drainage. On valide ainsi l'hypothèse qui a été faite d'une couche

équivalente d'épaisseur unité pour le SDE.

La méthode du double continuum permet alors de modéliser l'écoulement de l'eau en se basant sur un petit nombre de paramètres qui sont mesurables sur le terrain comme le montre les études existantes. Ainsi, des campagnes de mesures spécifiques permettraient de mieux contraindre le modèle et de mettre en place des simulations plus précises.

La modélisation d'un phénomène naturel a permis d'étudier les interactions qui se mettent en place lors de la mise en charge d'un système hydrologique glaciaire. Les résultats obtenus lors de cette expérience ne permettent pas de modéliser fidèlement un jökulhlaup mais ils donnent de nouvelles pistes sur les données nécessaires à leur modélisation. Ainsi, on a vu que la charge hydraulique établie avant la perturbation était à l'origine des différentes réponses du glacier. La mise en évidence de paramètres qui varient fortement avec la conductivité hydraulique du système de drainage peut aussi avoir son importance pour remonter à ces valeurs difficilement mesurables.

Certains points restent à développer pour permettre de représenter fidèlement d'autres phénomènes en liens avec l'hydrologie sous-glaciaire tels que les événements d'accélération printanière que l'on observe sur des nombreux glaciers Alpains. On devra alors introduire dans le modèle un processus de fermeture du système de drainage efficace qui permette de rendre compte de l'évolution saisonnière du système de drainage. Des tests préliminaires qui n'ont pas été présentés ici laisse penser que le passage du modèle vers la troisième dimension ne devrait pas poser de problèmes majeurs ce qui autoriserait à traiter des cas plus complexes dans lesquels les effets 3D ont une importance non négligeable.

## Annexe A

# Présentation de la méthode des éléments finis

On présente ici les deux points clés de la méthode des éléments finis que sont la définition de la formulation variationnelle de l'équation et le choix des fonctions de base qui permettront de calculer la valeur de cette solution sur les nœuds de la grille. Cette Annexe s'inspire en grande partie du cours de R. Chambon intitulé "Numerical methods for non linear mechanics".

### A.1 La formulation faible d'un problème

La formulation faible ou variationnelle est obtenue par le biais de la méthode de Galerkin. Cette méthode permet de décrire de façon simplifiée le système d'équation aux dérivées partielles que l'on veut résoudre. On présentera ici cette méthode en se basant sur un problème simple à une seule dimension ( $x$ ). Le problème traité est celui d'une colonne de longueur unité soumise à son propre poids et qui subit un frottement sur sa surface latérale. Ces deux forces sont des fonctions de  $x$  respectivement nommées  $G(x)$  (force volumétrique) et  $f(x)$  (force surfacique).

Les problèmes de physique se réduisent généralement à une équation de conservation du moment et une équation d'état propre au matériau considéré. On a donc ici l'équation de conservation du moment :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = f, \quad (\text{A.1})$$

et l'équation d'état :

$$G = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{A.2})$$

On calcule alors une équation mixte issue des deux équation précédente (A.1) et (A.2) en substituant  $G$  dans l'équation de conservation du moment. On obtient alors une équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$-\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f. \quad (\text{A.3})$$



Pour ce problème, on fixe les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ G(1) = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x}(1) = -n, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

qui représentent une condition de Dirichlet en  $x = 0$  (vitesse fixée) et une condition de Neumann en  $x = 1$  (flux fixé).

Il faut alors définir une formulation faible de l'EDP (A.3). On introduit pour cela dans l'équation (A.3) un champ de déplacement virtuel et cinématiquement admissible  $\nu$ . L'hypothèse d'un champ cinématiquement admissible signifie que ce dernier est continu et partage les mêmes conditions aux limites que le champ réel. On intègre cette nouvelle équation sur tout le domaine (ici de 0 à 1) :

$$-\int_0^1 \nu \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int_0^1 f \nu dx. \quad (\text{A.5})$$

En intégrant par partie le membre de gauche de l'équation (A.5) on obtient l'expression suivante :

$$\int_0^1 \gamma \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 f \nu dx + \gamma \nu(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0) - \gamma \nu(1) \frac{\partial u}{\partial x}(1), \quad (\text{A.6})$$

et l'introduction des conditions aux limites (A.4) dans l'équation (A.6) en prenant en compte le fait que  $\nu$  est cinématiquement admissible donne alors :

$$\int_0^1 \gamma \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 f \nu dx + n \nu(1). \quad (\text{A.7})$$

Une des solutions de cette équation est donnée par le théorème de l'énergie cinétique. On cherche donc la fonction  $u$  qui minimise l'énergie cinétique  $\Pi(u)$  définie comme la somme des travaux des forces intérieures et extérieures au système :

$$\Pi(u) = -\frac{1}{2} \int_0^1 u \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - \int_0^1 f u dx. \quad (\text{A.8})$$

L'intégration par partie de cette équation donne alors en prenant en compte les conditions aux limites (A.4) :

$$\Pi(u) = \frac{\gamma}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^1 f u dx - n u(1) \quad (\text{A.9})$$

On en vient alors à la discrétisation de l'objet que l'on considère. Si cet objet est divisé en  $p$  éléments chacun défini par une fonction de base  $\alpha_i(x)$ . Il est alors possible de décomposer la fonction  $u$  en  $p$  termes chacun dépendant de la fonction de base et de la solution de la fonction  $u$  sur un nœud. On a ainsi :

$$u(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(x) u_i \quad (\text{A.10})$$

En utilisant la méthode de Rayleigh Ritz on peut alors écrire (Rayleigh, 1877; Ritz, 1908) :

$$\frac{\partial \Pi(u)}{\partial u_i} = \int_0^1 \gamma \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right) \left( u_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) dx - \int_0^1 f \alpha_i dx, \quad (\text{A.11})$$

or par hypothèse, la fonction  $\Pi(u)$  est minimisée par  $u$ , sa dérivée par rapport aux termes  $u_i$  (solutions de  $u$ ) sera donc nulle d'où :

$$u_j \left[ \gamma \int_0^1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} dx \right] = \int_0^1 f \alpha_i dx, \quad (\text{A.12})$$

ce système d'équation peut alors être écrit sous une forme matricielle :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (\text{A.13})$$

où  $\mathbf{K}$  est une matrice de  $p \times p$  éléments  $k_{ij}$  appelée matrice de rigidité,  $\mathbf{U}$  est le vecteur contenant les  $p$  solutions  $u_i$  et enfin  $\mathbf{F}$  est le vecteur force contenant  $p$  composantes  $f_i$ . Les termes  $k_{ij}$  et  $f_i$  s'écrivent :

$$k_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} dx \text{ et } f_i = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 f \alpha_i dx. \quad (\text{A.14})$$

On doit alors définir les fonctions de base qui permettent la discrétisation puis la résolution de ce problème matriciel.

## A.2 Les fonctions de base

Les fonctions de base sont directement liées à la discrétisation du domaine. Ainsi le domaine d'étude est divisé en un nombre d'éléments donnés. Les coins de chaque élément correspondent alors aux nœuds du modèle sur lesquels la solution approchée de l'EDP sera calculée. Chacun des nœuds possède alors une fonction de base qui lui est propre. Ces fonctions  $\alpha_i$  sont définies de sorte qu'elles valent 1 au nœud auquel elles sont rattachées et zéro sur tous les autres nœuds. Ainsi la somme de toutes les fonctions de base sur le modèle permet de décrire complètement le modèle discrétisé.

Les fonctions de bases les plus répandues sont des fonctions polynomiales. Elle valent 1 sur le nœud auquel elles appartiennent et 0 sur les nœuds voisins ainsi que sur tous les autres nœuds du domaine. Dans ce travail, j'utiliserai uniquement des fonctions polynomiales de degré 1 sur des éléments linéaires, triangulaires ou prismatiques. Un exemple de ces fonctions de base dans des cas à une et deux dimensions est présenté sur la Figure A.1

On peut utiliser les fonctions polynomiales de degré 1 présentées sur la Figure A.1(a) pour résoudre le système matriciel  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$  développé dans la partie précédente. On écrit pour cela les équations décrivant les fonctions de bases :

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} & \text{si les nœuds } i \text{ et } j \text{ sont voisins,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

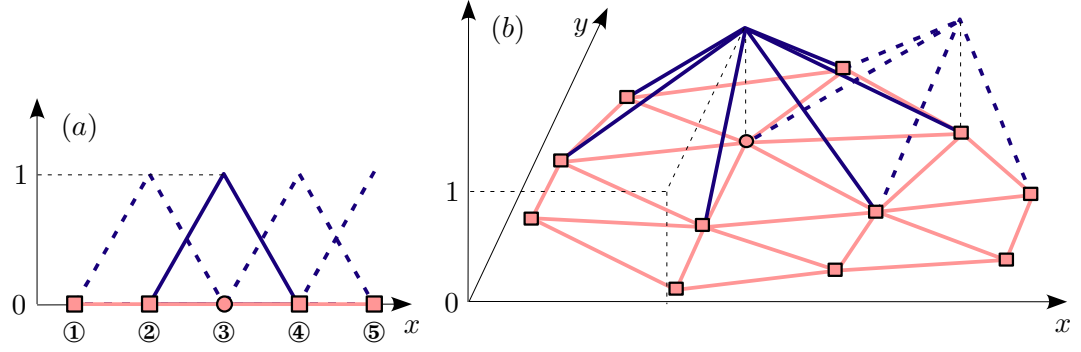


FIG. A.1: Schéma représentant des fonctions de bases polynomiales de degré 1 pour des éléments linéiques (a) et triangulaires (b). Les frontières d'éléments sont tracées en rouge et la fonction de base qui se rapporte au noeud indiqué par un point est tracée en bleu, les autres noeuds sont marqués par des carrés. Les fonctions de base relatives aux autres noeuds sont représentées en pointillés (une seule pour le cas 2D pour des raisons de clarté). L'axe vertical correspond à la valeur des fonctions de base et les chiffres encadrés aux numéros de noeuds.

On a alors tous les outils pour résoudre le problème précédent. Si l'on considère que notre élément de longueur unité est divisé en quatre éléments, on a alors 5 noeuds. La valeur en  $x = 0$  étant déjà fixée par les conditions aux limites, on a alors besoin de définir quatre fonctions de bases comme présentées sur la Figure A.1(a). On peut alors calculer les termes présentés dans les équations (A.14) pour les différents noeuds :

$$k_{ii} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i}, \quad (\text{A.16})$$

$$k_{i,i+1} = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i}, \quad (\text{A.17})$$

$$k_{i,i-1} = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}, \quad (\text{A.18})$$

A partir de ces expressions, de la définition matricielle du système et des conditions aux limites, il est alors possible de donner l'expression matricielle du système en considérant tous les éléments de même longueur  $1/4$  :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

ou les fonctions  $F_i$  valent :

$$u_1 = 0 \text{ pour la condition de Dirichlet} \quad (\text{A.20})$$

$$F_i = \frac{1}{4\gamma} \int_0^1 f u_i dx \text{ pour } 2 < i < 4 \quad (\text{A.21})$$

$$\text{et } F_5 = \frac{1}{4\gamma} \int_0^1 f u_5 dx + \frac{n}{4\gamma} \text{ pour la condition de Neumann.} \quad (\text{A.22})$$

On obtient ainsi un système de quatre équations à quatre inconnues qui pourra être résolu numériquement.



## Annexe B

# Développement de l'équation d'état d'un solide poreux

L'équation de diffusion développée dans le Chapitre 4 demande de considérer à la fois la compressibilité de l'eau et celle du milieu poreux. En effet, l'hypothèse supposant un aquifère confiné nécessite de prendre en compte ces deux compressibilités. Pour le fluide, l'équation d'état utilisée est l'équation de compressibilité isotherme (équation (4.21)). Cette équation lie les variations de pression et de densité par l'intermédiaire de la compressibilité du fluide  $\beta_l$ . La définition d'une équation d'état pour le solide poreux est plus complexe. On doit en effet prendre en compte la déformation propre du solide mais aussi celle qui est due au réarrangement des grains les uns par rapport aux autres et qui fait intervenir la porosité. Pour mettre en place cette relation, on définit un volume de milieu poreux  $V$  constitué d'un volume de solide  $V_s$  et d'un volume de pores  $V_p$ .

Pour le solide, le coefficient de compressibilité  $\beta_s$  est défini tel que :

$$\frac{dV_s}{V_s} = -\frac{d\rho_{gs}}{\rho_{gs}} = -\beta_s dp, \quad (\text{B.1})$$

que l'on peut aussi écrire sous la même forme que l'équation de compressibilité du fluide (4.21) :

$$\frac{d\rho_{gs}}{dt} = \rho_{gs}\beta_s \frac{dp}{dt} \quad (\text{B.2})$$

Ce coefficient de compressibilité  $\beta_s$  peut être mesuré sur des minéraux purs ou à la cellule triaxiale.

Le calcul de la compressibilité de la matrice poreuse est basé sur la théorie de l'élasticité des milieux continus. Selon cette théorie, il existe une relation permettant de lier linéairement le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et le tenseur des accroissements de contraintes effectives  $\Delta\boldsymbol{\bar{\sigma}}$ . La contrainte effective est définie comme la différence entre la contrainte totale et la pression d'eau  $\boldsymbol{\bar{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - p_w$ . En d'autres termes, cela signifie que la contrainte totale est soutenue par la contrainte effective  $\boldsymbol{\bar{\sigma}}$  dans la phase solide et par la pression d'eau  $p_w$  dans les pores. Si l'on fait l'hypothèse d'un matériau isotrope (uniquement défini par son module d'Young  $E$  et son coefficient de Poisson  $\nu$ ) la théorie de l'élasticité pour les trois directions principales  $(i, j, k)$  s'écrit :

$$-\varepsilon_i = \frac{1}{E} \Delta \bar{\sigma}_i - \frac{\nu}{E} (\Delta \bar{\sigma}_j + \Delta \bar{\sigma}_k) . \quad (\text{B.3})$$

A partir de la somme des déformations relatives dans les trois directions principales, on peut alors écrire l'expression de la dilatation volumique du milieu poreux :

$$-\frac{\Delta V}{V} = \sum_{l=1}^3 -\varepsilon_l = \frac{1}{E} \left( \sum_{l=1}^3 \Delta \bar{\sigma}_l \right) - \frac{2\nu}{E} \left( \sum_{l=1}^3 \Delta \bar{\sigma}_l \right) . \quad (\text{B.4})$$

Si l'on écrit l'accroissement moyen des contraintes  $\Delta \bar{\sigma} = \frac{1}{3} \left( \sum_{l=1}^3 \Delta \bar{\sigma}_l \right)$  alors :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \Delta \bar{\sigma} . \quad (\text{B.5})$$

Dans la théorie de la consolidation, où l'on traite d'une contrainte totale  $\sigma$  constante, on peut définir un coefficient  $\alpha$  pour une transformation particulière où  $d\bar{\sigma} + dp_w = 0$ . Si on réécrit l'équation (B.5) pour des déformations faibles, on a alors ce coefficient  $\alpha$  tel que :

$$\frac{dV}{V} = -\alpha d\bar{\sigma} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{3(1-2\nu)}{E} . \quad (\text{B.6})$$

En admettant que  $V$ ,  $V_s$  et  $V_p$  sont des fonctions de  $\bar{\sigma}$  et  $p_w$  on peut poser a priori trois lois de déformation linéaires en  $d\bar{\sigma}$  et  $dp_w$  définies comme celle de l'élasticité. On écrit généralement ces lois en fonction de la variation de la contrainte totale  $d\sigma$  et de celle de la pression  $dp_w$ , ce qui donne pour le milieu poreux :

$$\frac{dV}{V} = -C d\sigma + \alpha dp_w , \quad (\text{B.7})$$

pour les pores :

$$\frac{dV_p}{V_p} = -C_p d\sigma + \alpha_p dp_w , \quad (\text{B.8})$$

et pour le solide :

$$\frac{dV_s}{V_s} = -C_s d\sigma + \alpha_s dp_w . \quad (\text{B.9})$$

On cherche alors à lier entre eux ces six coefficients pour simplifier les notations. Pour mettre en place ces relations, on applique des transformations particulières à l'élément de milieu poreux.

(i) Dans la première transformation, on considère que la contrainte totale est constante ( $d\sigma = 0$ ). Dans ce cas là, on aura :

$$\frac{dV}{V} = \alpha dp_w \quad ; \quad \frac{dV_s}{V_s} = \alpha_s dp_w \quad ; \quad \frac{dV_p}{V_p} = \alpha_p dp_w . \quad (\text{B.10})$$

On cherche alors à lier entre elles les expressions des déformations de chaque composantes du milieu poreux. On repart pour cela de la définition des différents volumes :

$$V = V_p + V_s, \quad (\text{B.11})$$

après différenciation, cette équation devient :

$$dV = dV_p + dV_s, \quad (\text{B.12})$$

les volumes sont alors injectés dans l'équation pour mettre en évidence les termes de déformation de chacun des composants du solide :

$$\frac{dV}{V} = \frac{V_p}{V} \frac{dV_p}{V_p} + \frac{V_s}{V} \frac{dV_s}{V_s}, \quad (\text{B.13})$$

on simplifie alors cette expression en remplaçant les ratios de volumes par la porosité :

$$\frac{dV}{V} = \omega \frac{dV_p}{V_p} + (1 - \omega) \frac{dV_s}{V_s}. \quad (\text{B.14})$$

On injecte alors dans l'équation (B.14) la définition des déformations relatives à ce premier état de contrainte (équation (B.10)) pour obtenir une première relation entre les différents paramètres :

$$\alpha = \omega \alpha_p + (1 - \omega) \alpha_s. \quad (\text{B.15})$$

(ii) On suppose maintenant une transformation s'exerçant à contrainte effective constante ( $d\bar{\sigma} = 0$ ). Cette transformation revient à affecter uniquement le solide. En effet, les modifications de la porosité sont uniquement dues à une variation de pression. Dans ce cas, on observe donc une déformation qui est uniquement due à la contraction ou à la dilatation des grains solides. La porosité  $\omega$  du milieu poreux sera donc invariante durant cette sollicitation :

$$d\omega = 0 = d\left(\frac{V_p}{V}\right) = \frac{V dV_p - V_p dV}{V^2}, \quad (\text{B.16})$$

après simplification de cette équation on a :

$$\frac{dV_p}{V_p} = \frac{dV}{V}. \quad (\text{B.17})$$

En repartant de l'équation liant les trois volumes  $V = V_p + V_s$  on obtient alors :

$$\frac{dV_p}{V_p} = \frac{dV}{V} = \frac{dV - dV_p}{V - V_p} = \frac{dV_s}{V_s}, \quad (\text{B.18})$$

et avec  $d\bar{\sigma} = 0$  on a  $d\sigma = dp_w$  et donc :

$$\frac{dV_s}{V_s} = (\alpha_s - C_s) dp_w \quad ; \quad \frac{dV_p}{V_p} = (\alpha_p - C_p) dp_w \quad ; \quad \frac{dV}{V} = (\alpha - C) dp_w. \quad (\text{B.19})$$



Or on a déjà défini le coefficient de compressibilité du solide  $\beta_s$ . De plus, cette définition se base sur un essai sur le solide isolé, on a donc bien  $d\bar{\sigma} = 0$ . On peut alors écrire les relations suivantes entre les différents paramètres :

$$\beta_s = C_s - \alpha_s = C_p - \alpha_p = C - \alpha. \quad (\text{B.20})$$

(iii) Geertsma (1957) propose d'utiliser le théorème de Maxwell-Betti qui est énoncé tel que :  
*«étant donné deux charges hydrostatiques élémentaires imposées  $d\sigma$  et  $dp_w$ , le travail des forces dues à la première charge dans le déplacement dû à la deuxième est égal au travail des forces dues à la deuxième dans le déplacement dû à la première.»*

On peut formaliser ce théorème sous la forme :

$$\left[ (\partial V / \partial p_w)_{d\bar{\sigma}} dp_w \right] d\sigma = - \left[ (\partial V_p / \partial \sigma)_{dp_w} d\sigma \right] dp_w, \quad (\text{B.21})$$

toujours en gardant à l'esprit que les déformations sont prises à  $\bar{\sigma}$  et  $p_w$  tous deux constants. On a donc directement :

$$\frac{dV}{dp_w} = - \frac{dV_p}{d\sigma}. \quad (\text{B.22})$$

En reprenant les équations (B.7) et (B.8) on obtient une nouvelle relation :

$$\alpha V = C_p V_p \quad \text{qui donne :} \quad \alpha = \omega C_p. \quad (\text{B.23})$$

En remaniant les trois relation de (B.20) ainsi que les équation (B.15) et (B.23) on formalise alors les relations entre les différents taux de compressibilité, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C & = & \alpha + \beta_s \\ C_p & = & \frac{\alpha}{\omega} \\ C_s & = & \frac{\beta_s}{1 - \omega} \\ \alpha_p & = & \frac{\alpha}{\omega} - \beta_s \\ \alpha_s & = & \frac{\omega}{1 - \omega} \beta_s \end{array} \right. \quad (\text{B.24})$$

On en revient aux deux inconnues que l'on voulait exprimer :  $\frac{d\omega}{dt}$  et  $\frac{d\rho_s}{dt}$ .

On fait ici l'hypothèse que la contrainte totale appliquée sur l'aquifère ne varie pas ( $d\sigma = 0$ ). Pour la variation de la porosité, on utilise la relation entre le volume total  $V$  et le volume de solide  $V_s$  :

$$V_s = (1 - \omega)V, \quad (\text{B.25})$$

qui donne après différenciation :

$$dV_s = (1 - \omega)dV - Vd\omega. \quad (\text{B.26})$$

On fait apparaître les déformations dans cette dernière équation :

$$\frac{V_s}{V} \frac{dV_s}{V_s} = (1 - \omega) \frac{dV}{V} - d\omega . \quad (\text{B.27})$$

A l'aide du terme de variation de porosité, on a alors :

$$d\omega = (1 - \omega) \left( \frac{dV}{V} - \frac{dV_s}{V_s} \right) . \quad (\text{B.28})$$

En utilisant les équations d'état précédemment développées, on peut alors définir la porosité en fonction de la pression :

$$d\omega = (1 - \omega)(\alpha - \alpha_s)dp_w , \quad (\text{B.29})$$

laquelle, dérivée par rapport au temps donne :

$$\frac{d\omega}{dt} = (1 - \omega)(\alpha - \alpha_s) \frac{dp_w}{dt} . \quad (\text{B.30})$$

On doit alors exprimer aussi la variation de densité en fonction de la pression. On utilise pour cela la conservation de la masse du solide dans le volume élémentaire mobile :

$$d(\rho_s V_s) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\rho_s}{\rho_s} + \frac{dV_s}{V_s} = 0 . \quad (\text{B.31})$$

En se basant toujours sur les équations d'état dans le milieu poreux, on écrit en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{d\rho_s}{dt} = -\rho_s \frac{dV_s}{V_s} . \quad (\text{B.32})$$

Les expressions de la variation de porosité et de densité du solide permettent alors d'exprimer l'équation 4.20 uniquement en fonction de la pression d'eau.



## Annexe C

# Principe de la méthode de pénalisation

Le Chapitre 4 présente les différentes composantes du modèle hydrologique ainsi que la façon dont le transfert d'eau se fait entre ses couches. On va ici s'intéresser de plus près à la méthode qui permet de fixer la borne supérieure de la charge hydraulique dans les sédiments. Cette limite permet de gérer le processus d'ouverture du système de drainage efficace et le volume d'eau qui doit transiter d'un système à l'autre.

La particularité de cette limite est qu'elle est basée sur l'annulation de la pression effective ( $N = p_w - \sigma_{nn}$ ) qui elle même dépend de la charge hydraulique dans la couche de drainage inefficace mais aussi du champ de contrainte calculé dans la glace par le modèle d'écoulement. L'annulation de la pression effective en fonction de la contrainte sur un nœud et à un pas de temps donné aboutit à une limite supérieure  $H_m$  pour la charge hydraulique. Les éléments du vecteur solution  $\mathbf{H}$  de l'équation (4.46) qui excèdent cette valeur doivent donc être modifiés. Le remplacement brutal dans le vecteur solution des valeurs supérieures à la valeur limite entraînerait des incohérences dans la résolution du système. On utilise donc la méthode présentée ci-dessous.

Soit  $H_i^{(k-1)}$ , les éléments du vecteur solution  $\mathbf{H}^{(k-1)}$  à l'itération  $k-1$ . On peut formaliser la limite supérieure de la charge hydraulique telle que  $H_i^{(k-1)} < H_m$ . Les nœuds pour lesquels cette inégalité n'est pas respectée seront alors marqués comme "actif". Avant la première itération du système, tous les nœuds seront donc marqués comme étant "inactifs".

Le système est alors assemblé pour la nouvelle itération  $k$  :  $\mathbf{M}\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{F}$ . Si l'élément  $i$  du vecteur solution est marqué comme étant actif alors on effectue les modifications suivantes dans le système :

les éléments présents sur la  $i^{eme}$  ligne de la matrice  $\mathbf{M}$  sont fixés à 0

la valeur à la diagonale  $M_{ii}$  de la matrice  $\mathbf{M}$  est fixée à 1

la  $i^{eme}$  valeur du vecteur force est fixée telle qu'elle soit égale à la valeur maximale de charge hydraulique au nœud  $i$  ( $F_i = H_m$ ).

D'un point de vue numérique, ces modifications reviennent à fixer une condition de Dirichlet au nœud  $i$  ce qui aboutit à un nouveau système :

$$\mathbf{M}'\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{F}', \quad (\text{C.1})$$

pour lequel on calcule le vecteur solution  $\mathbf{H}^{(k)}$ . La résolution de ce système engendre un résidu  $\mathbf{R}$  qui est calculé à partir de la matrice et du vecteur force initiaux du système :

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{H}^{(k)} - \mathbf{F} . \quad (\text{C.2})$$

Ainsi pour les nœuds  $i$  qui ont été marqués comme étant actifs, la valeur  $R_i$  du résidu correspond à la quantité d'eau qui a été ajoutée pour vérifier la limite supérieure fixée. Les résidus des nœuds actifs seront donc négatifs étant donné qu'un volume d'eau doit être retranché pour diminuer la charge hydraulique du nœud jusqu'à ce que celle-ci soit en dessous de la limite fixée. Au long des itérations successives, les nœuds sont désactivés uniquement si le signe de leur résidu est positif et que leur charge hydraulique est inférieure à la limite locale de charge hydraulique.

La méthode de pénalisation est alors itérée jusqu'à ce que le critère de convergence fixé soit atteint.

# Bibliographie

- Adalgeirsdóttir, G., Gudmundsson, H., and Björnsson, H. (2003). A regression model for the mass-balance distribution of the Vatnajökull ice cap, Iceland. *Annals Glaciol.*, **37**, 189–193.
- Alley, R. B., Blankenship, D. D., Bentley, C. R., and Rooney, S. T. (1986). Deformation of till beneath ice stream B, West Antarctica. *Nature*, **322**(6074), 57–59.
- Alley, R. B., Clark, P. U., Huybrechts, P., and Joughin, I. (2005). Ice-sheet and sea-level changes. *Science*, **310**(5747), 456.
- Anderson, R. S., Anderson, S. P., MacGregor, K. R., Waddington, E. D., O’Neel, S., Riihimäki, C. A., and Loso, M. G. (2004). Strong feedbacks between hydrology and sliding of a small alpine glacier. *J. Geophys. Res.*, **109**, 10–1029.
- Anderson, R. S., Walder, J. S., Anderson, S. P., Trabant, D. C., and Fountain, A. G. (2005). The dynamic response of Kennicott Glacier, Alaska, USA, to the Hidden Creek Lake outburst flood. *Ann. Glaciol.*, **40**(1), 237–242.
- Arnold, N., Richards, K., Willis, I., and Sharp, M. (1998). Initial results from a distributed, physically based model of glacier hydrology. *Hydrological Processes*, **12**(2), 191–219.
- Arnold, N. S., Willis, I. C., Sharp, M. J., Richards, K. S., and Lawson, W. J. (1996). A distributed surface energy-balance model for a small valley glacier. I. Development and testing for Haut Glacier d’Arolla, Valais, Switzerland. *Journal of Glaciology*, **42**(140), 77–89.
- Bartholomäus, T. C., Anderson, R. S., and Anderson, S. P. (2008). Response of glacier basal motion to transient water storage. *Nature Geoscience*, **1**(1), 33–37.
- Bear, J. (1979). *Hydraulics of groundwater*. McGraw-Hill New York.
- Bear, J. (1988). *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications.
- Behrens, H., Bergmann, H., Moser, H., Ambach, W., and Jochum, O. (1975). On the water channels of the internal drainage system of the Hintereisferner, Ötztal Alps. *J. Glaciol.*, **14**, 375–382.
- Bindschadler, R. (1983). The importance of pressurized subglacial water in separation and sliding at the glacier bed. *J. Glaciol.*, **29**(101), 3–19.

- Björnsson, H. (1998). Hydrological characteristics of the drainage system beneath a surging glacier. *Nature*, **395**(6704), 771–774.
- Björnsson, H. (2002). Subglacial lakes and jökulhlaups in Iceland. *Global Planetary Change*, **35**(3-4), 255–271.
- Björnsson, H., Rott, H., Gudmundsson, S., Fischer, A., Siegel, A., and Gudmundsson, M. T. (2001). Glaciervolcano interactions deduced by SAR interferometry. *J. Glaciol.*, **47**(156), 58–70.
- Blankenship, D. D., Bentley, C. R., Rooney, S. T., and Alley, R. B. (1986). Seismic measurements reveal a saturated porous layer beneath an active Antarctic ice stream. *Nature*, **322**(6074), 54–57.
- Blankenship, D. D., Bentley, C. R., Rooney, S. T., and Alley, R. B. (1987). Till beneath ice stream B. I-Properties derived from seismic travel times. II-Structure and continuity. III-Till deformation-Evidence and implications. IV-A coupled ice-till flow model. *J. Geophys. Res.*, **92**, 8903–8940.
- Blatter, H. (1995). Velocity and stress fields in grounded glaciers : a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *J. Glaciol.*, **41**(138), 333–344.
- Boulton, G. S. and Vivian, R. (1973). Underneath the glaciers. *The Geographical Magazine*, **45**, 311–316.
- Boulton, G. S., Lunn, R., Vidstrand, P., and Zatsepin, S. (2007a). Subglacial drainage by groundwater-channel coupling, and the origin of esker systems : part ii.theory and simulation of a modern system. *Quat. Science Rev.*, **26**(7-8), 1091–1105.
- Boulton, G. S., Lunn, R., Vidstrand, P., and Zatsepin, S. (2007b). Subglacial drainage by groundwater-channel coupling, and the origin of esker systems : Part 1.glaciological observations. *Quat. Science Rev.*, **26**(7-8), 1067–1090.
- Brugman, M. (1986). *Water flow at the base of a surging glacier*. Ph.D. thesis.
- Budd, W. F., Keage, P. L., and Blundy, N. A. (1979). Empirical studies of ice sliding. *J. Glaciol.*, **23**(89), 157–170.
- Burkimsher, M. (1983). Investigations of glacier hydrological systems using dye tracer techniques : observations at Pasterzengletscher, Austria. *J. Glaciol.*, **29**(103).
- Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed., Oxford university Press.
- Clarke, G. K. C. (1987). Subglacial till : a physical framework for its properties and processes. *J. Geophys. Res.*, **92**(B9), 8942–8984.
- Cooper, H. H. (1966). The Equation of Groundwater Flow in Fixed and Deforming Coordinates. *J. Geophys. Res.*, **71**, 4785.

- Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris.
- de Marsily, G. (2004). Cours d'hydrogeologie. available at : <http://www.cig.ensmp.fr/hydro/BIB/manuels/gdm-hydrogeologie.pdf>.
- Drake, L. D. and Shreve, R. L. (1973). Pressure melting and regelation of ice by round wires. *Proc. R. Soc., Ser. A*, **332**(1588), 51–83.
- Engelhardt, H., Kamb, B., Raymond, C. F., and Harrison, W. D. (1979). Observation of basal sliding of Variegated Glacier, Alaska. *J. Glaciol.*, **23**, 406–407.
- Engelhardt, H. F., Harrison, W. D., and Kamb, B. (1978). Basal sliding and conditions at the glacier bed as revealed by bore-hole photography. *J. Glaciol.*, **20**(84).
- Fischer, U. H. and Clarke, G. K. C. (2001). Review of subglacial hydro-mechanical coupling : Trapridge Glacier, Yukon Territory, Canada. *Quat. Int.*, **86**(1), 29–43.
- Flovenz, O. G. and Saemundsson, K. (1993). Heat flow and geothermal processes in Iceland. *Tectonophysics*, **225**(1-2), 123–138.
- Flowers, G., Björnsson, H., and Pálsson, F. (2003). New insights into the subglacial and periglacial hydrology of vatnajökull, iceland, from a distributed physical model. *J. Glaciol.*, **49**(165), 257–270.
- Flowers, G. E. (2008). Subglacial modulation of the hydrograph from glacierized basins. *Hydrological Processes*, **22**(19), 3903–3918.
- Flowers, G. E. and Clarke, G. K. C. (2002). A multicomponent coupled model of glacier hydrology, 1, theory and synthetic examples. *J. Geophys. Res.*, **107**(B11).
- Flowers, G. E., Björnsson, H., Pálsson, F., and Clarke, G. K. C. (2004). A coupled sheet-conduit mechanism for jökulhlaup propagation. *Geophys. Res. Lett.*, **31**(5), L05401.
- Flowers, G. E., Marshall, S. J., Björnsson, H., and Clarke, G. K. C. (2005). Sensitivity of vatnajökull ice cap hydrology and dynamics to climate warming over the next 2 centuries. *J. Geophys. Res.*, **110**.
- Fountain, A. G. (1993). Geometry and flow conditions of subglacial water at South Cascade Glacier, Washington State, U. S. A. : An analysis of tracer injections. *J. Glaciol.*, **39**(131), 143–156.
- Fountain, A. G. (1994). Borehole water-level variations and implications for the subglacial hydraulics of South Cascade Glacier, Washington State, U. S. A. *J. Glaciol.*, **40**(135), 293–304.
- Fowler, A. C. (1981). A theoretical treatment of the sliding of glaciers in the absence of cavitation. *Phil. Trans. R Soc., Ser. A*, pages 637–681.
- Fowler, A. C. (1986). A sliding law for glaciers of constant viscosity in the presence of subglacial cavitation. *Proc. R. S., Ser. A*, pages 147–170.



- Fowler, A. C. (1987). Sliding with cavity formation. *J. Glaciol.*, **33**(115), 255–267.
- Fowler, A. C. (1999). Breaking the seal at grímsvön, iceland. *J. Glaciol.*, **45**(151), 506–516.
- Freeze, R. A. and Cherry, J. A. (1979). *Groundwater*. Prentice Hall.
- Fudge, T. J., Humphrey, N. F., Harper, J. T., and Pfeffer, W. T. (2008). Diurnal fluctuations in borehole water levels : configuration of the drainage system beneath bench glacier, alaska, usa. *J. Glaciol.*, **54**(185), 297–306.
- Gagliardini, O., Cohen, D., Råback, P., and Zwinger, T. (2007). Finite-element modeling of subglacial cavities and related friction law. *J. Geophys. Res.*, **112**.
- Gagliardini, O., Durand, G., Zwinger, T., Hindmarsh, R. C. A., and Le Meur, E. (2010). Coupling of ice-shelf melting and buttressing is a key process in ice-sheets dynamics. *Geophys. Res. Lett.*, **37**(14), L14501.
- Geertsma, J. (1957). The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks. *Petroleum Trans.*, pages 331–340.
- Gerrard, J. A. F. and Perutz, M. F. (1952). Measurement of the velocity distribution along a vertical line through a glacier. *Proc. R. Soc., Ser. A*, **213**(1115), 546–558.
- Glen, J. W. (1955). The creep of polycrystalline ice. *Proc. R. Soc., Ser. A*, **228**(1175), 519–538.
- Gordon, S., Sharp, M., Hubbard, B., Willis, I., Smart, C., Copland, L., Harbor, J., and Ketterling, B. (2001). Borehole drainage and its implications for the investigation of glacier hydrology : experiences from haut glacier d’arolla, switzerland. *Hydrological Processes*, **15**(5).
- Greve, R. (1997). Application of a polythermal three-dimensional ice sheet model to the Greenland ice sheet : Response to steady-state and transient climate scenarios. *Journal of Climat*, **10**(5), 901–918.
- Gudmundsson, M. T., Sigmundsson, F., and Björnsson, H. (1997). Ice-volcano interaction of the 1996 Gjalp subglacial eruption, Vatnajökull, Iceland. *Nature*, **389**(6654), 954–957.
- Gudmundsson, S., Gudmundsson, M. T., Björnsson, H., Sigmundsson, F., Rott, H., and Carstensen, J. M. (2002). Three-dimensional glacier surface motion maps at the Gjalp eruption site, Iceland, inferred from combining InSAR and other ice-displacement data. *Ann. Glaciol.*, **34**(1), 315–322.
- Haeberli, W., Zemp, M., Kääb, A., Paul, F., and Hoelzle, M. (2008). Fluctuations of Glaciers 2000–2005. **IX**.
- Hallet, B. (1979). Subglacial regelation water film. *J. Glaciol.*, **23**(89), 321–334.
- Hallet, B. and Anderson, R. S. (1980). Detailed glacial geomorphology of a proglacial bedrock area at Castleguard Glacier, Alberta, Canada. *Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie*, **16**, 171–184.

- Hansen, F. R. (2001). *Radar Interferometry -Data Interpretation and Error Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Harbor, J., Sharp, M., Copland, L., Hubbard, B., Nienow, P., and Mair, D. (1997). Influence of subglacial drainage conditions on the velocity distribution within a glacier cross section. *Geology*, **25**, 739.
- Hewitt, I. J. and Fowler, A. C. (2008). Seasonal waves on glaciers. *Hydrological Proc.*, **22**, 3919–3930.
- Hindmarsh, R. C. A. (2004). A numerical comparison of approximations to the stokes equations used in ice sheet and glacier modeling. *J. Geophys. Res.*, **109**.
- Holdsworth, G. and Bull, C. (1970). The flow law of cold ice : investigations on Meserve Glacier, Antarctica. *IASH Publ.*, **86**, 204–216.
- Hondoh, T. (2009). An overview of microphysical processes in ice sheets : toward nanoglaciology. *Low Temperature Science Suppl. Issue*, **68**, 1–24.
- Hooke, R. L., Laumann, T., and Kohler, J. (1990). Subglacial water pressures and the shape of subglacial conduits. *J. Glaciol.*, **36**(122), 67–71.
- Hubbard, A., Blatter, H., Nienow, P., Mair, D., and Hubbard, B. (1998). Comparison of a three-dimensional model for glacier flow with field data from haut glacier d’arolla, switzerland. *J. Glaciol.*, **44**(147), 368–378.
- Hubbard, B. and Nienow, P. (1997). Alpine subglacial hydrology. *Quat. Science Rev.*, **16**(9), 939–955.
- Hubbard, B. P., Sharp, M. J., Willis, I. C., Nielsen, M. K., and Smart, C. C. (1995). Borehole water-level variations and the structure of the subglacial hydrological system of haut glacier d’arolla, valais, switzerland. *J. Glaciol.*, **41**(139), 572–583.
- Huss, M., Bauder, A., Werder, M., Funk, M., and Hock, R. (2007). Glacier-dammed lake outburst events of Gornersee, Switzerland. *J. Glaciol.*, **53**(181), 189–200.
- Hutter, K. (1983). *Theoretical Glaciology : material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. D. Reidel Publishing Company, Terra Scientific Publishing Company.
- Iken, A. (1981). The effect of the subglacial water pressure on the sliding velocity of a glacier in an idealized numerical model. *J. Glaciol.*, **27**, 407–421.
- Iken, A. and Truffer, M. (1997). The relationship between subglacial water pressure and velocity of Findelengletscher, Switzerland, during its advance and retreat. *J. Glaciol.*, **43**(144), 328–338.
- Jenssen, D. (1977). A three-dimensional polar ice-sheet model. *J. Glaciol.*, **18**, 373–389.
- Kamb, B. (1970). Sliding motion of glaciers : theory and observation. *Rev. Geophys.*, **8**, 673–728.

- Kamb, B. (1987). Glacier surge mechanism based on linked cavity configuration of the basal water conduit system. *J. Geophys. Res.*, **92**(B9).
- Kamb, B. and LaChapelle, E. (1964). Direct observation of the mechanism of glacier sliding over bedrock. *J. Glaciol.*, **5**, 159–172.
- Kamb, B. and LaChapelle, E. (1968). Flow dynamics and structure in a fast moving icefall. *Trans. Am. Geophys. Union*, **49**(312), 134–183.
- Kamb, B., Raymond, C. F., Harrison, W. D., Engelhardt, H., and Echelmeyer, K. A. (1985). Glacier Surge Mechanism : 1982-1983 Surge of Variegated Glacier, Alaska. *Science* **227**(4686).
- Kessler, M. A. and Anderson, R. S. (2004). Testing a numerical glacial hydrological model using spring speed-up events and outburst floods. *Geophys. Res. Lett.*, **31**(18), L18503.
- Krimmel, R., Tangborn, W., and Meier, M. (1973). Water flow through a temperate glacier. *Rôle de la neige et de la glace en hydrologie*, page 401.
- Le Meur, E. and Vincent, C. (2003). A two-dimensional shallow ice-flow model of Glacier de Saint-Sorlin, France. *J. Glaciol.*, **49**(167), 527–538.
- Le Meur, E., Gerbaux, M., Schäfer, M., and Vincent, C. (2007). Disappearance of an Alpine glacier over the 21st Century simulated from modeling its future surface mass balance. *Earth and Planetary Science Letters*, **261**(3-4), 367–374.
- Létréguilly, A., Huybrechts, P., and Reeh, N. (1991). Steady-state characteristics of the Greenland ice sheet under different climates. *J. Glaciol.*, **37**(125), 149–157.
- Lliboutry, L. (1964). *Traité de glaciologie*. Paris, Masson et Cie.
- Lliboutry, L. (1968). General theory of subglacial cavitation and sliding of temperate glaciers. *J. Glaciol.*, **7**(49), 21–58.
- Lliboutry, L. (1975). Loi de glissement d’un glacier sans cavitation. *Ann. Geophys.*, **31**, 207–226.
- MacAyeal, D. R. (1989). Large scale ice flow over a viscous basal sediment : Theory and application to ice stream b, antarctica. *J. Geophys. Res.*, **94**, 4071–4087.
- Magnússon, E., Rott, H., Björnsson, H., and Pálsson, F. (2007). The impact of jökulhlaups on basal sliding observed by SAR interferometry on Vatnajökull, Iceland. *J. Glaciol.*, **53**(181), 232–240.
- Magnússon, E., Björnsson, H., Rott, H., and Pálsson, F. (2010). Reduced glacier sliding caused by persistent drainage from a subglacial lake. *The Cryosphere*, **4**(1), 13–20.
- Mahaffy, M. W. (1976). A three-dimensional numerical model of ice sheets : tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories. *J. Geophysical Res.*, **81**(6), 1059–1066.
- Mair, D., Nienow, P., Willis, I., and Sharp, M. (2001). Spatial patterns of glacier motion during a high-velocity event : Haut glacier d’arolla, switzerland. *J. Glaciol.*, **47**(156), 9–20.

- Mair, D., Nienow, P., Sharp, M., Wohlleben, T., and Willis, I. (2002). Influence of subglacial drainage system evolution on glacier surface motion : Haut Glacier d'Arolla, Switzerland. *J. Geophys. Res.*, **107**(B8), 2175.
- Mair, D., Willis, I., Fischer, U. H., Hubbard, B., Nienow, P., and Hubbard, A. (2003). Hydrological controls on patterns of surface, internal and basal motion during three "spring events" : Haut glacier d'arolla, switzerland. *J. Glaciol.*, **49**(167), 555–567.
- Mair, D., Hubbard, B., Nienow, P., Willis, I., and Fischer, U. H. (2008). Diurnal fluctuations in glacier ice deformation : Haut glacier d'arolla, switzerland. *Earth Surf. Proc. Landforms*, **33**(8).
- Mangeney, A. and Califano, F. (1998). The shallow ice approximation for anisotropic ice : formulation and limits. *Journal of Geophysical Research*, **103**, 691–705.
- Marshall, H. P., Harper, J. T., Pfeffer, W. T., and Humphrey, N. F. (2002). Depth-varying constitutive properties observed in an isothermal glacier. *Geophysical Res. Letters*, **29**(23), 2146.
- Mathews, W. H. (1959). Vertical distribution of velocity in Salmon Glacier, British Columbia. *J. Glaciol.*, **3**(26), 448–54.
- McCall, J. G. (1952). The internal structure of a cirque glacier. Report on studies of the englacial movements and temperatures. *J. Glaciol.*, **2**, 122–131.
- Moeller, C. A., Mickelson, D. M., Anderson, M. P., and Winguth, C. (2007). Groundwater flow beneath late weichselian glacier ice in nordfjord, norway. *J. Glaciol.*, **53**(180), 84–90.
- Morland, L. (1984). Thermomechanical balances of ice sheet flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **29**(1), 237–266.
- Morland, L. W. (1976). Glacier sliding down an inclined wavy bed with friction. *J. Glaciol.*, **17**(77).
- Murray, T. (1997). Assessing the paradigm shift : deformable glacier beds. *Quat. Science Rev.*, **16**(9), 995–1016.
- Ng, F. and Liu, S. (2009). Temporal dynamics of a jökulhaup system. *J. Glaciol.*, **55**(192).
- Nienow, P., Sharp, M., and Willis, I. (1998). Seasonal changes in the morphology of the subglacial drainage system, haut glacier d'arolla, switzerland. *Earth Surf. Proc. Landforms*, **23**(9), 825–843.
- Nye, J. F. (1953). The flow law of ice from measurements in glacier tunnels, laboratory experiments and the Jungfraufirn borehole experiment. *Proc. R. Soc., Ser. A*, **219**(1139), 477–489.
- Nye, J. F. (1969). A calculation on the sliding of ice over a wavy surface using a Newtonian viscous approximation. *Proc. R. Soc., Ser. A*, pages 445–467.

- Nye, J. F. (1970). Glacier sliding without cavitation in a linear viscous approximation. *Proc. R. Soc., Ser. A*, **315**(1522), 381–403.
- Nye, J. F. (1973a). The motion of ice past obstacles. *Physics Chem. Ice, E. Whalley, SJ Jones and LW Gold (ed.)*, *Royal Society of Canada*, pages 387–394.
- Nye, J. F. (1973b). Water at the bed of a glacier. *IAHS Publi.*, (95), 189–194.
- Nye, J. F. (1976). Water flow in glaciers : jökulhlaups, tunnels and veins. *J. Glaciol.*, **17**(76), 181–207.
- Oerlemans, J. (1982). A model of the Antarctic ice sheet. *Nature*, **297**(5867), 550–553.
- Paterson, W. (1994). *The Physics of glaciers*. 3rd ed., Oxford, Pergamon ,Tarrytown ,N. J.
- Pattyn, F. (2003). A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model :basic sensitivity,ice stream development, and ice flow across subglacial lakes. *J. Geophys. Res.*, **108**(B8), 2382.
- Payne, A. (1995). Limit cycles in the basal thermal regime of ice sheets. *J. Geophys. Res.*, **100**(B3), 4249–4263.
- Perkins, J. (1820). On the compressibility of water. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **110**, 324–329.
- Piotrowski, J. A. (2006). Groundwater under ice sheets and glaciers. *Glacier Sci. Env. Change*, pages 50–59.
- Rayleigh, L. (1877). *Theory of Sound*.
- Raymond, C., Benedict, R., Harrison, W., Echelmeyer, K., and Sturm, M. (1995). Hydrological discharges and motion of Fels and Black Rapids Glaciers, Alaska, USA : implications for the structure of their drainage systems. *J. of Glaciol.*, **41**(138), 290–304.
- Raymond, C. F. (1971). Flow in a transverse section of Athabasca Glacier. *J. Glaciol.*, **10**(58), 55–84.
- Rémy, F., Legresy, B., and Testut, L. (2001). Ice sheet and satellite altimetry. *Surveys in Geophysics*, **22**(1), 1–29.
- Richards, K., Sharp, M., Arnold, N., Gurnell, A., Clark, M., Tranter, M., Nienow, P., Brown, G., Willis, I., and Lawson, W. (1996). An integrated approach to modelling hydrology and water quality in glacierized catchments. *Hydrological Processes*, **10**(4), 479–508.
- Ritz, C., Fabre, A., and Letréguilly, A. (1996). Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters : consequences for the evolution through the last climatic cycle. *Climate Dynamics*, **13**(1), 11–23.
- Ritz, W. (1908). Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *J. reine angew. Math*, **135**(1), 1–61.

- Robin, G. Q. (1976). Is the basal ice of a temperate glacier at the pressure melting point? *J. Glaciol.*, **16**, 183–196.
- Rommelaere, V. (1997). *Trois Problèmes Inverses en glaciologie*. Ph.D. thesis, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- Röthlisberger, H. (1972). Water pressure in intra-and subglacial channels. *J. Glaciol.*, **11**(62), 177–203.
- Savage, J. C. and Paterson, W. S. B. (1963). Borehole measurements in the Athabasca Glacier. *J. Geophys. Res.*, **68**, 4521.
- Scanlon, B., Mace, R., Barrett, M., and Smith, B. (2003). Can we simulate regional groundwater flow in a karst system using equivalent porous media models? Case study, Barton Springs Edwards aquifer, USA. *Journal of hydrology*, **276**(1-4), 137–158.
- Schäfer, M. (2007). *Modélisation de l'écoulement des glaciers tempérés*. Ph.D. thesis, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- Schoof, C. (2005). The effect of cavitation on glacier sliding. *Proc. R. Soc., Ser. A*, pages 609–627.
- Seaberg, S. Z., Seaberg, J. Z., Hooke, R. L., and Wiberg, D. W. (1988). Character of the englacial and subglacial drainage system in the lower part of the ablation area of Storglaciären, Sweden, as revealed by dye-trace studies. *J. Glaciol.*, **34**, 217–227.
- Sharp, M., Tison, J. L., and Fierens, G. (1990). Geochemistry of subglacial calcites : implications for the hydrology of the basal water film. *Arctic and Alpine research*, pages 141–152.
- Sharp, M., Richards, K., Willis, I., Arnold, N., Nienow, P., Lawson, W., and Tison, J. L. (1993). Geometry, bed topography and drainage system structure of the haut glacier d'arolla, switzerland. *Earth Surf. Process. Landf.*, **18**(6), 557–571.
- Shoemaker, E. M. and Leung, H. K. N. (1987). Subglacial drainage for an ice sheet resting upon a layered deformable bed. *J. Geophys. Res.*, **92**(B6), 4935–4946.
- Shreve, R. L. (1972). Movement of water in glaciers. *J. Glaciol.*, **11**(62), 205–214.
- Sicart, J. E. (2002). Contribution à l'étude des flux d'énergie, du bilan de masse et du débit de fonte d'un glacier tropical : Le Zongo, Bolivie. *Doctor thesis, Université Paris VI, Department of Pierre et Marie Curie, Paris, France*.
- Snorrason, A., Jónsson, P., Pálsson, S., Árnason, S., Sigurðsson, O., Víkingsson, S., Sigurðsson, A., and Zóphóníasson, S. (1997). Hlaupiðá Skeiðarársandi haustið 1996, Vatnajökull gos og hlaup, editor Hreinn Haraldsson. *Public Roads Administration*.
- Stenborg, T. (1973). Some viewpoints on the internal drainage of glaciers. *Hydrology of Glaciers*, **95**, 117–129.

- Teutsch, G. (1993). An extended double-porosity concept as a practical modelling approach for a karstified terrain. *IAHS PUBLICATION*, **207**, 281–292.
- Teutsch, G. and Sauter, M. (1991). Groundwater modeling in karst terranes : Scale effects, data acquisition and field validation. In *Proc. Third Conf. Hydrogeology, Ecology, Monitoring, and Management of Ground Water in Karst Terranes, Nashville, TN*, pages 17–35.
- Theakstone, W. H. (1967). Basal sliding and movement near the margin of the glacier Østerdalsisen, Norway. *J. Glaciol.*, **6**, 805–816.
- Vilesov, E. N. (1961). Temperature of ice in the lower parts of the Tuyuksu glaciers. *IASH publi.*, **54**, 313–24.
- Vincent, C. (2002). Influence of climate change over the 20th century on four French glacier mass balances. *J. Geophys. Res.*, **107**(4375), 10–1029.
- Vincent, C., Kappenberger, G., Valla, F., Bauder, A., Funk, M., and Le Meur, E. (2004). Ice ablation as evidence of climate change in the Alps over the 20th century. *J. Geophys. Res.*, **109**(10104), 10–1029.
- Vincent, C., Soruco, A., Six, D., and Le Meur, E. (2009). Glacier thickening and decay analysis from 50 years of glaciological observations performed on Glacier d’Argentiere, Mont Blanc area, France. *Annals Glaciol.*, **50**(50), 73–79.
- Vivian, R. (1975). *Les glaciers des Alpes occidentales*. Imprimerie Allier.
- Waddington, B. S. and Clarke, G. K. C. (1995). Hydraulic properties of subglacial sediment determined from the mechanical response of water-filled boreholes. *J. Glaciol.*, **41**(137), 112–124.
- Walder, J. S. and Fowler, A. (1994). Channelized subglacial drainage over a deformable bed. *J. Glaciol.*, **40**(134), 3–15.
- Walder, J. S. and Hallet, B. (1979). Geometry of former subglacial water channels and cavities. *J. Glaciol.*, **23**, 335–346.
- Weertman, J. (1957a). Deformation of floating ice shelves. *Journal of Glaciology*, **3**, 38–42.
- Weertman, J. (1957b). On the sliding of glaciers. *J. Glaciol.*, **3**(21), 33–38.
- Weertman, J. (1966). Effect of a basal water layer on the dimensions of ice sheets. *J. Glaciol.*, **6**, 191–207.
- Weertman, J. (1972). General theory of water flow at the base of a glacier or ice sheet. *Rev. Geophys. Space Phys.*, **10**(1), 287–333.
- Werder, M. A. and Funk, M. (2009). Dye tracing a jokulhlaup : II. Testing a jokulhlaup model against flow speeds inferred from measurements. *J. Glaciol.*, **55**(193), 899–908.

- Werder, M. A., Alexandre, L., and Funk, M. (2009). Dye tracing a jokulhlaup : I. Subglacial water transit speed and water-storage mechanism. *J. Glaciol.*, **55**(193), 889.
- Willis, I. C., Sharp, M. J., and Richards, K. S. (1990). Configuration of the drainage system of Midtdalsbreen, Norway, as indicated by dye-tracing experiments. *J. Glaciol.*, **36**(122).



## Résumé

La modélisation de la dynamique glaciaire passe par la compréhension et la reproduction des processus physiques responsables des déplacements observés à la surface des glaciers. Certains de ces mécanismes sont bien connus et intégrés dans les modèles. D'autres processus, et en particuliers ceux qui œuvrent à la base des glaciers, sont moins bien maîtrisés. Ainsi, même si le glissement à la base des glaciers a été observé dès le début du XX<sup>e</sup> siècle sa modélisation reste un problème actuel.

La majorité des modèles de dynamiques glaciaires utilisent des lois de frottement uniquement basées sur la contrainte basale tangentielle pour déterminer les vitesses de glissement. Il est alors nécessaire de faire varier en temps et en espace le paramètre de la loi de frottement pour obtenir un champ de vitesse comparable aux données mesurées. Par ailleurs, de nombreuses études ont montré que la pression et donc le volume d'eau à la base des glacier jouait un rôle important sur la vitesse de glissement des glaciers.

L'objectif de cette thèse est de mettre en place un modèle capable de calculer la pression d'eau à la base des glaciers et de le coupler à un modèle d'écoulement glaciaire par l'intermédiaire d'une loi de frottement. On utilise pour cela une approche utilisant des milieux poreux analogues représentant les deux composantes (inefficace et efficace) du système de drainage. Les expériences de sensibilité présentées montrent que cette méthode permet de reproduire les spécificités d'un système de drainage sous glaciaire. Enfin, la reproduction qualitative d'un phénomène glaciologique extrême de jökulhlaup (vidange de lac sous-glaciaire) a permis de vérifier la robustesse du modèle.

## Abstract

Modeling glacier dynamics needs proper knowledge of a number of processes which are responsible for the displacements observed at the surface of glaciers. Some of these mechanisms are well known and yet implemented into ice flow models. On the other hand, processes that work at the base of the glaciers are much less controled. Thus, even if glacier sliding has been observed since the early twentieth century its accurate modeling is still a current issue.

In order to determine glacier sliding, friction laws that are currently used in ice flow models are only depending upon the basal shear stress. This simple relationship needs a precise fitting of the parameters which vary both in time and space so as to yield surface velocities compatible with data. Field observations also show that subglacial water pressure plays a crucial role in glacier dynamics. Furthermore, water pressure is closely related to the volume of water present at the bed of the glacier and, therefore to the production of water.

The objective of this thesis is to develop a subglacial hydrological model which enables the computation of water pressure at the base of glaciers and to couple it to an ice flow model through of a friction law. We chose to implement an equivalent porous media which, according to the chosen parameters, features both efficient and inefficient components of the system. The sensitivity experiments show that the proposed method can reproduce the characteristics of a subglacial drainage system. Finally, the robustness of the model arose from its ability to qualitatively reproduce an extrem glaciological phenomenon under the form of a jökulhlaup.